Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

AL210 - Algebra 2 - Tutorato X

DOCENTE: PROF.SSA STEFANIA GABELLI

TUTORI: M. CEPALE, A. GALOPPINI

<u>ESERCIZIO 1.</u> Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni <u>giustificando</u> le risposte:
(a) l'ideale di $\mathbb{Z}[i]$ generato da $2-i$ coincide con l'ideale generato da $1+2i$;
(b) l'ideale di $\mathbb{Z}_6[X]$ generato da 2 e $3X$ non coincide con l'ideale generato da $2+3X$;
(c) $1+2X$ non é invertibile in $\mathbb{Z}_4[X]$.

<u>ESERCIZIO 2.</u> Sia $\mathbb{Z}\left[i\sqrt{5}\right] := \left\{a + i\sqrt{5}b \ \textit{tale che} \ a, b \in \mathbb{Z}\right\}$.
Dando per buono che é un sottoanello del campo $\mathbb{C}$,
(a) si trovi il suo gruppo delle unitá;
(b) si dica se 3 é irriducibile in $\mathbb{Z}\left[i\sqrt{5}\right]$.

<u>ESERCIZIO 3.</u> Sia dato il polinomio $f(x) := 3x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 4x + 2$:
(a) si scomponga $f(x)$ nel campo razionale, reale e complesso;
(b) sia $g(x)$ un polinomio che abbia le stesse radici complesse di $f(x)$ ma tutte con molteplicitá 1; cosa possiamo dire su quoziente e resto della divisione di $f(x)$ per $g(x)$?

<u>ESERCIZIO 4.</u> Si considerino $f, g \in \mathbb{R}[X]$, definiti da:

$$f(x) := 4x^4 + x^2 - 3x + 1, \quad g(x) := 2x^4 - x^3 - 2x + 1.$$

Siano poi $I := (f)$ e $J := (g)$.
(a) Si scompongano f e g in $\mathbb{R}[X]$;
(b) si trovino quoziente e resto della divisione di f per g;
(c) si trovino un generatore per l'ideale $I + J$ ed uno per l'ideale $I \cap J$;
(d) si dica se I é massimale in $\mathbb{R}[X]$ e se ne deduca che $\mathbb{R}[X]/I$ non é un campo.

<u>ESERCIZIO 5.</u> Considerare $f(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{Z}_5[X]$. Dimostrare che $B := \dfrac{\mathbb{Z}_5[X]}{(f(X))}$ non è un campo esibendo un elemento che non è invertibile. Quanti elementi ha B? Determinare quali sono invertibili e quali zero-divisori.

<u>ESERCIZIO 6.</u> Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false in $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Q}[X]$:
(a) $3X$ divide $7X^2$;
(b) $X - 3$ divide $X^3 - 3X^2 + X - 3$;
(c) $3(X - 3)$ divide $X^3 - 3X^2 + X - 3$.

<u>ESERCIZIO 7.</u> Stabilire se i seguenti polinomi sono irriducibili rispettivamente in $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$:

$$21X + 3; \qquad X^2 + X + 3; \qquad X^3 - 1; \qquad 2X^4 + 5X^2 + 2.$$

Esercizio 8. Siano $K = \frac{\mathbb{Z}_3}{(X^2+1)}$ e $K' = \frac{Z_3}{(X^2-X-1)}$.

- Dire se esistono campi il cui gruppo moltiplicativo delle unità abbia cardinalità 49 o 63;
- Verificare che K e K' sono entrambi campi;
- Determinare il numero degli elementi di K e K', poi dimostrare che $\mathbb{Z}_3[\xi]$ è un campo con lo stesso numero di elementi, ove ξ è una radice di X^2+1;
- Dimostrare che K e K' sono isomorfi (suggerimento: dimostrare che sono entrambi isomorfi a $\mathbb{Z}_3[\xi]$ sfruttando un opportuno omomorfismo);
- Mostrare che $X^2 - X - 1$ è riducibile su $\mathbb{Z}_3[\xi]$ esibendone le radici.

Esercizio 9. Dimostrare che $A = \mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X]$ è un dominio di Bézout seguendo questi passi:

- Notare che A è di Bézout se e solo se per ogni coppia $f(X), g(X)$ di elementi di A esiste un $h(X) \in A$ tale che $h(X)A = f(X)A + g(X)A$;
- Osservare che esiste un $H(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tale che $H(X)\mathbb{Q}[X] = f(X)\mathbb{Q}[X] + g(X)\mathbb{Q}[X]$;
- Mostrare che $\forall p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ esiste $z \in \mathbb{Z}$ tale che $z \cdot p(X) \in A$;
- Moltiplicare l'equazione del secondo punto per $z \in \mathbb{Z}$ tale che $z \cdot H(X) \in A$;
- Una volta osservato che $h^*(X) := z \cdot H(X)$ appartiene anche a $f(X)\mathbb{Q}[X]$ e $g(X)\mathbb{Q}[X]$, mostrare che esiste $w \in \mathbb{Z}$ tale che $w \cdot h^*(X)$ appartenga a $f(X)A$ e $g(X)A$;
- Concludere la dimostrazione facendo vedere che $h(X) := w \cdot H(X)$ è la $h(X)$ che cercavamo nel primo punto.

Dire infine se A è anche un dominio a fattorizzazione unica.

Esercizio 10. Si consideri il numero naturale:

$n := |\{$Giorni delle vacanze di Natale compresi (non strettamente) tra il 24 dicembre e il 6 gennaio$\}|$

(a) Si calcoli $U(\mathbb{Z}_n)$, si dica se, come gruppo moltiplicativo, è ciclico, e in tal caso se ne calcolino i generatori.
(b) Si dica se $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ è un dominio o un campo.
(c) Si dica se $\mathbb{Z}_n[X]$ è un UFD, un PID e/o un dominio euclideo.
(d) Si dica a chi è isomorfo il quoziente $\mathbb{Z}_n[X]/X$ sfruttando il teorema fondamentale dell'omomorfismo di anelli, quindi si dica se è un dominio e/o un campo.