

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017
AL210 - Algebra 2 - Tutorato II

DOCENTE: PROF.SSA STEFANIA GABELLI

TUTORI: M. CEPALE, A. GALOPPINI

ESERCIZIO 1. Dimostrare che

$$\mathbb{Z}_n \text{ é un campo } \iff n \text{ é un numero primo.}$$

ESERCIZIO 2. Sia $(\text{GL}_2(\mathbb{R}), \circ)$ il gruppo delle matrici invertibili 2×2 ad entrate in \mathbb{R} . Presi gli elementi:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

determinare $\text{ord}(A)$, $\text{ord}(B)$ e $\text{ord}(A \circ B)$

ESERCIZIO 3. Siano p, q due interi coprimi tra loro. Si consideri il sottogruppo di $(\mathbb{Q}, +)$ generato da $\langle \frac{1}{p}, \frac{1}{q} \rangle$. Provare che tale sottogruppo é ciclico, generato dall'elemento $\frac{1}{pq}$.

ESERCIZIO 4. Dimostrare che $\forall a, b$ tali che $\text{MCD}(a, b) = 1$ allora $\mathbb{Z}_{ab} \cong \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$.

ESERCIZIO 5. Siano $\tau := (23)$, $\sigma := (123)$ permutazioni di S_3 e definiamo $K := \langle \tau \rangle$ e $H := \langle \sigma \rangle$. Descrivere le classi laterali destre e sinistre di K e H in S_3 e dire se $K \triangleleft S_3$ e/o $H \triangleleft S_3$.

ESERCIZIO 6. Dimostrare o confutare la seguente proposizione:

$$\forall H \leq G \text{ tale che } [G : H] = 2 \Rightarrow H \triangleleft G.$$

ESERCIZIO 7. Trovare le radici quinte di $-1 + i$.

ESERCIZIO 8. Per ognuno dei seguenti numeri complessi dire se sono radici dell'unita ed in tal caso determinarne l'ordine:

$$\begin{array}{cccccc} i & i - 1 & e^{2\pi i} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & 3i & \\ 2e^{e^{\frac{2\pi i}{3}}} & e^{\frac{4\pi i}{7}} & e^{2\pi} & -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i & & \end{array}$$