**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017**

# AL210 - Algebra 2 - Tutorato III

Docente: Prof.ssa Stefania Gabelli

Tutori: M. Cepale, A. Galoppini

Esercizio 1. Sia $G$ un gruppo e sia $x \in G$. Si consideri il centralizzante di $x$:

$$C(x) := \{g \in G \mid gx = xg\}$$

- Si dimostri che $C(x)$ è un sottogruppo di $G$;
- Si esibiscano un gruppo $G$ e un suo elemento $x$ tali che $C(x)$ non sia normale in $G$;
- Si dimostri che:

$$Z(G) := \{g \in G \mid gx = xg, \forall x \in G\} = \bigcap_{x \in G} C(x)$$

- Si dimostri che $gxg^{-1} = hxh^{-1} \iff gC(x) = hC(x)$.

Esercizio 2. Sia $G$ un gruppo, $\Lambda$ un insieme di indici e sia $N := \{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di sottogruppi normali di $G$. Si dimostri che:

(a) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda \trianglelefteq G$ ;

(b) $< N > \trianglelefteq G$.

Esercizio 3. Sia $G := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0\}$ un insieme dotato dell'operazione $\star$ così definita:

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, ad + b)$$

$\forall (a, b), (c, d) \in G$. Dopo aver verificato che$(G, \star)$ è un gruppo, e che $H := \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Q}, a \neq 0\}$ è un sottogruppo di $G$, descriverne tutte le classi laterali sinistre e destre.

Esercizio 4. Dimostrare che, preso $H$ sottogruppo di un gruppo $G$, l'unica classe laterale sinistra (o destra) di $H$ che sia anche un sottogruppo è $H$ stesso.

Esercizio 5. Sia $G$ un gruppo di ordine finito.

(a) Dimostrare che l'insieme $A := \{x \in G \mid x^2 \neq 1\}$ ha un numero pari di elementi;

(b) Dimostrare che, se $G$ è un gruppo di ordine pari, allora contiene necessariamente almeno un elemento di ordine 2.

Esercizio 6. Sia $G$ un gruppo moltiplicativo, e siano $a, b \in G$ tali che $ord(a) = n$ e $ord(b) = m$ per qualche $n, m \in \mathbb{N}$. Dimostrare che, se $G$ è abeliano e $MCD(n, m) = 1$, allora $ord(ab) = mn$.

Esercizio 7. Sia $X$ un insieme. Definiamo gli insiemi:

$\mathcal{S}(X) := \{f : X \longmapsto X \mid f\ funzione\ biunivoca\}$;

$\mathcal{A}(X) := \{\phi \in \mathcal{S}(X) : |\{x \in X \mid \phi(x) \neq x\}| < \infty\}$.

Dimostrare che $(\mathcal{A}(X), \circ)$ è un gruppo, ove $\circ$ è l'usuale operazione di composizione tra funzioni.

Esercizio 8. Sia $G$ un gruppo, e sia $\Omega_n := \{g \in G \mid ord(g) = n\}$.

Dimostrare che $\Phi(n)$ divide $|\Omega_n|$, ove $\Phi$ è la funzione di Eulero. Dire inoltre se $\Omega_n$ è un sottogruppo.