Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

AL210 - Algebra 2 - Tutorato IV

DOCENTE: PROF.SSA STEFANIA GABELLI
TUTORI: M. CEPALE, A. GALOPPINI

ESERCIZIO 1. Determinare gli omomorfismi tra le seguenti coppie di gruppi, quindi stabilire quanti e quali di essi sono suriettivi e/o iniettivi.
(i) Da $\mathbb{Z}_{28}$ a $\mathbb{Z}_9$;
(ii) Da $\mathbb{Z}_{12}$ a $\mathbb{Z}_{27}$;
(iii) Da $\mathbb{Z}_{20}$ a $\mathbb{Z}_{10}$;
(iv) Da $\mathbb{Z}_{15}$ a $\mathbb{Z}_{45}$.

ESERCIZIO 2. Sia $n \in \mathbb{N}$. Si descriva il gruppo $Aut(\mathbb{Z}_n)$ e si dimostri che è isomorfo a $(U(\mathbb{Z}_n), \cdot)$.

ESERCIZIO 3. Sia n un intero dispari positivo, $n \neq 1$. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, sia $x \star y := (x^n + y^n)^{1/n}$. Dimostrare che $(\mathbb{R}, \star)$ è isomorfo a $(\mathbb{R}, +)$.

ESERCIZIO 4. Determinare tutti i gruppi G tali che esista un omomorfismo suriettivo:

$$\phi : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow G$$

ESERCIZIO 5. Descrivere $Aut(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$, $Aut(S_3)$ e $Aut(V_4)$.

ESERCIZIO 6. Determinare tutti gli omorfismi da S_3 a $\mathbb{Z}_6$ e da $\mathbb{Z}_6$ a S_3. Dire se fra loro ce ne sono di suriettivi e/o iniettivi.

ESERCIZIO 7. Si consideri l'applicazione:

$$f : \big(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +\big) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto a$$

Se ne individui il nucleo, e si descriva il gruppo quoziente:

$$\frac{\big(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +\big)}{Ker(f)}$$

ESERCIZIO 8. Sia ϕ la mappa:

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$x \longmapsto e^{2\pi i x}$$

(i) Dimostrare che ϕ è un omomorfismo di gruppi tra $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}*, \cdot)$;
(ii) Dimostrare che $ker(\phi) = \mathbb{Z}$;
(iii) Dimostrare che l'immagine di ϕ è $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$; (iv) Dedurne che $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.