Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

AL210 - Algebra 2 - Tutorato V

Docente: Prof.ssa Stefania Gabelli

Tutori: M. Cepale, A. Galoppini

Esercizio 1. Sia $\phi : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{R}, +)$ tale che $\phi(a + ib) = a - b$.
- Si dimostri che ϕ é un omomorfismo;
- Si determinino $Ker\phi$ e $Im\phi$ e si definisca l'isomorfismo canonico $\mathbb{C}/Ker\phi \to Im\phi$;
- Si determini $\phi^{-1}(2)$.

Esercizio 2. Determinare generatori, sottogruppi e gruppi quoziente di $\mathbb{Z}_{18}$.

Esercizio 3. Dimostrare che $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5, +)$ dove $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$ é un gruppo ciclico ed esibirne tutti i generatori.

Esercizio 4. Determinare tutti gli omomorfismi di $\mathbb{Z}_{30} \to \mathbb{Z}_{21}$ descrivendone nucleo e immagine.

Esercizio 5. Si determini $Aut(\mathbb{Z}_8)$ e si stabilisca se tale gruppo é ciclico.

Esercizio 6. Sia C_{15} il gruppo delle radici complesse quindicesime dell'unitá.
(a) Determinare il gruppo $Aut(C_{15})$;
(b) Stabilire se $Aut(C_{15})$ é un gruppo ciclico.

Esercizio 8. Sia $G := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Si definisca su G l'operazione $\circ$ definita nel modo seguente:

$$(x, y, z) \circ (u, v, w) := (x + (-1)^z u, y + v, z + w).$$

(a) Si dimostri che $(G, \circ)$ é un gruppo non abeliano;
(b) Si dimostri che il sottoinsieme $N := \mathbb{Z} \times \{0\} \times \{0\}$ di G é un sottogruppo normale di G
(c) Si deduca che $G/N \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
(d) Calcolare il centro di G.

Esercizio 9. Siano

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{tale che}\, b \in \mathbb{R} \right\}; H := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{tale che}\, ad \neq 0,\ a, b, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dimostrare che N e H sono sottogruppi di $GL_2(\mathbb{R})$, N é normale in H, H non é normale in $GL_2(\mathbb{R})$