Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

AL210 - Algebra 2 - Tutorato VI

DOCENTE: PROF.SSA STEFANIA GABELLI
TUTORI: M. CEPALE, A. GALOPPINI

ESERCIZIO 1. Esplicitare un isomorfismo tra i seguenti gruppi: $(U(\mathbb{Z}_{15}), \cdot)$ e $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, +)$

ESERCIZIO 2. Mostrare che per ogni $n \geq 2$, i gruppi $\mathbb{Z}_{n^2}$ e $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ non sono isomorfi

ESERCIZIO 3. Si considerino le seguenti permutazioni sull'insieme $\{1, 2, \ldots, 6\}$, $\alpha = (1234)$, $\beta = (1524)$.
(a) Si determini l'ordine della permutazione $\alpha\beta$.
(b) Sia $H =< \alpha, \beta >$ il sottogruppo generato da α e β nel gruppo S_6; si determinino le orbite di H nella sua azione su $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

ESERCIZIO 5. Si consideri il sottogruppo

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \right\}$$

del gruppo $GL_2(\mathbb{R})$, e sia $\star : K \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione definita ponendo

$$A \star \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

per ogni $A \in K$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
(a) Si verifichi che $\star$ é un'azione di K su $\mathbb{R}^2$.
(b) Si trovi l'orbita e lo stabilizzatore dei punti $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>Esercizio 6.</u> Si considerino i seguenti gruppi abeliani:
$G_1 := \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$; $G_2 := \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$; $G_3 := \mathbb{Z}_{16}$.
(a) Si trovino gli elementi di ordine 4 di G_1.
(b) Per ogni $i, j \in \{1, 2, 3\}$, si dica se G_i é isomorfo a G_j.

<u>Esercizio 7.</u> Si dimostri che un gruppo di ordine pq con $p < q$ numeri primi e p che non divide q é necessariamente ciclico.

<u>Esercizio 8.</u> Dato un gruppo G di ordine 132, dimostrare che esiste un sottogruppo ciclico normale di ordine 11.