Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

AL210 - Algebra 2 - Tutorato VIII

DOCENTE: PROF.SSA STEFANIA GABELLI
TUTORI: A. GALOPPINI, M.CEPALE

ESERCIZIO 1 Si consideri la funzione:

$$f : \mathbb{Z}_{18} \longrightarrow \mathbb{Z}_3$$

$$[x]_{18} \mapsto [x]_3$$

(i) Provare che f è un ben definito omomorfismo;
(ii) Trovarne nucleo ed immagine;
(iii) Studiare, mediante il teorema fondamentale dell'omomorfismo, il quoziente $\mathbb{Z}_{18}/\ker f$.

ESERCIZIO 2 Sia K un campo, $\alpha \in K$ e $f(x) \in K[X]$, dimostrare che $\Phi_\alpha : K[X] \to K$, tale che $\Phi_\alpha(f(x)) := f(\alpha)$ è un ben definito omomorfismo, determinarne nucleo e immagine e applicare il teorema fondamentale di omomorfismo.

ESERCIZIO 3 Si considerino il campo $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ e un altro anello A tale che esista un omomorfismo non nullo $\phi : \mathbb{Q} \to A$. Dimostrare che esiste un sottoanello K di A che è isomorfo a $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

ESERCIZIO 4 Sia A un anello unitario. Provare che se gli unici ideali destri sono $\{0\}$ e A, allora A è un corpo.

ESERCIZIO 5 Sia $A = \mathbb{Z}_{(15)} := \left\{ \frac{m}{15^t} \in \mathbb{Q} | m, t \in \mathbb{Z}, t \geq 0 \right\}$.

(a) Verificare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}$;
(b) Determinare gli elementi invertibili di A;
(c) Provare che $\forall p \neq 3, 5$ con p primo, $(p) = pA$ è un ideale massimale in A;
(d) Se I è un ideale di A, provare che $I \cap \mathbb{Z}$ è un ideale di $\mathbb{Z}$.
(e) Provare che se $I \neq J$ sono ideali di A, allora $I \cap \mathbb{Z} \neq J \cap \mathbb{Z}$.
(f) Provare che se I è massimale, allora $I \cap \mathbb{Z}$ è massimale.

ESERCIZIO 6 Dimostrare che $\mathbb{Z}_n$ è locale e privo di elementi nilpotenti $\Leftrightarrow$ è un campo (un anello si dice "locale" se contiene un unico ideale massimale).

ESERCIZIO 7 Sia R un anello commutativo unitario. Siano I e J due suoi ideali. Sia $I + J := \{x + y | x \in I,\, y \in J\}$. Sia $\varphi : R \to R/I \times R/J$, l'applicazione definita come $\varphi(r) := (r + I, r + J)$ per ogni $r \in R$.

(a) Si dimostri che φ è un omomorfismo unitario di anelli.
(b) Si dimostri che φ è suriettivo $\Leftrightarrow I + J = R$.
(c) Si dimostri che $Ker(\varphi) = I \cap J$.
(d) Nel caso $R = \mathbb{Z}, I = 5\mathbb{Z}, J = 12\mathbb{Z}$, si dimostri che $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.