Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

AL210 - Algebra 2 - Tutorato IX

DOCENTE: PROF.SSA STEFANIA GABELLI
TUTORI: M.CEPALE, A.GALOPPINI

ESERCIZIO 1. Dire se $(5X, X^2)$ è principale in $\mathbb{Q}[X]$ e in $\mathbb{Z}[X]$, motivando la risposta.

ESERCIZIO 2. Sia X un'indeterminata. Si dica se l'ideale principale (X) in $\mathbb{Z}[X]$ è primo e/o massimale. Si dimostri che:
(a) (X) è un ideale primo di $A[X] \Leftrightarrow A$ è un dominio di integrità;
(b) (X) è un ideale massimale di $A[X] \Leftrightarrow A$ è un campo.

ESERCIZIO 3. Mostrare che l'intersezione di due ideali primi che non siano l'uno contenuto nell'altro non è un ideale primo.

ESERCIZIO 4. Fattorizzare in elementi irriducibili i seguenti elementi di $\mathbb{Z}[i]$:

$$6 \quad 10 \quad 13 \quad 3+4i \quad -3+8i \quad 11+3i$$

Poi determinare esplicitamente gli elementi di $\frac{\mathbb{Z}[i]}{1+i}$

ESERCIZIO 5.
(a) Quali elementi di $\mathbb{Z}_7$ sono quadrati perfetti? (cioè per quali $a \in \mathbb{Z}_7$, $\exists b \in \mathbb{Z}_7$ tale che $b^2 = a$?)
(b) Dedurre dal punto precedente per quali $a \in \mathbb{Z}_7$ si ha che $\dfrac{\mathbb{Z}_7[X]}{(X^2+a)}$ è un campo.
(c) Determinare l'inverso del generico elemento di $\dfrac{\mathbb{Z}_7[X]}{(X^2+4)}$.
(d) Determinare i divisori dello zero in $\dfrac{\mathbb{Z}_7[X]}{(X^2+3)}$.

ESERCIZIO 6. Fattorizzare $\alpha = 13+5i$ e $\beta = 8+9i$ in $\mathbb{Z}[i]$, calcolare $MCD(\alpha, \beta)$ tramite l'algoritmo di divisione con resto e scrivere l'identità di Bèzout. Dire se $\dfrac{\mathbb{Z}[i]}{(\alpha)}$ e $\dfrac{\mathbb{Z}[i]}{(\beta)}$ sono domini e/o campi. Infine, svolgere di nuovo l'esercizio con $\alpha = 13+18i$ e $\beta = 5+3i$.

ESERCIZIO 7. In $\mathbb{Z}[i]$ si consideri l'ideale $I = (20-5i, 1+3i)$. Si trovi un generatore di I e si stabilisca se I è massimale. Trovare l'inverso di $1+i$ in $\dfrac{\mathbb{Z}[i]}{I}$.

ESERCIZIO 8. Dire se è possibile calcolare in $\mathbb{Z}[i]$ il $MCD(a, b)$ senza fattorizzare a e b e senza utilizzare la divisione con resto in ognuno dei seguenti casi, quindi calcolarlo quando possibile.
- $a = 6-5i$; $b = 1+10i$
- $a = 16-17i$; $b = 11+12i$
- $a = 9+11i$; $b = 11-13i$

ESERCIZIO 9. Dimostrare che $(\mathbb{Z}[\sqrt{5}], +, \cdot)$ (ove $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] := \{a + \sqrt{5}b \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$) non è un dominio a fattorizzazione unica. E' un MCD-dominio?