Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2016/2017
AL210 - Esercizi 1: Operazioni

1. Si consideri in $\mathbb{Z}$ l'operazione definita da
$$a \star b := a^2 + b.$$
- Stabilire se l'operazione $\star$ è associativa o/e commutativa;
- Stabilire se esiste in $\mathbb{Z}$ un elemento neutro a destra o/e a sinistra rispetto all'operazione $\star$.

2. Si consideri in $\mathbb{Z}_8$ l'operazione definita da
$$a * b := ab - 1.$$
- Stabilire se $(\mathbb{Z}_8, *)$ è un gruppo.

3. Si considerino le operazioni binarie su $\mathbb{Z}$ denotate rispettivamente $\cdot, \diamond, \triangle$ e definite, per ogni $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, nel modo seguente:
$$x \cdot y := x + y + 1; \quad x \diamond y := \mid x \mid + y; \quad x \triangle y := xy + 1.$$
- Per ognuna di queste operazioni stabilire se sono verificate le proprietà: associativa, commutativa, esistenza di elemento neutro.
- Descrivere gli eventuali elementi simmetrizzabili rispetto a ciascuna delle operazioni.

4. Sia $X := \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Date le seguenti operazioni binarie su $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$:
$$(a, b) + (\alpha, \beta) := (a + \alpha, b + \beta); \qquad (a, b) \bullet (\alpha, \beta) := (a\alpha, \alpha b + a\beta),$$
dimostrare che:
- Le rispettive restrizioni a X sono operazioni binarie su X;
- $+$ e $\bullet$ sono associative e commutative su X;
- Esiste in X l'elemento neutro per entrambe le operazioni;
- Vale la proprietà distributiva di $\bullet$ rispetto a $+$;
-Ogni elemento di X è simmetrizzabile rispetto a $+$ ed esistono elementi di X che non sono simmetrizzabili rispetto a $\bullet$.

5. Sia X un insieme e $\mathcal{P}(X)$ il suo insieme delle parti.

   - Dimostrare che l'unione, l'intersezione e la differenza simmetrica Δ sono operazioni binarie su $\mathcal{P}(X)$.

   - Stabilire se l'unione e l'intersezione hanno l'elemento neutro e determinare, se esistono, gli elementi simmetrizzabili.

   - Sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme non vuoto e $P_A := \{B : A \subseteq B \subseteq X\}$. Dimostrare che l'unione è una operazione binaria su P_A. Stabilire se esiste l'elemento neutro.

   - Dimostrare che esiste l'elemento neutro per Δ e che ogni elemento di $\mathcal{P}(X)$ è simmetrizzabile rispetto a Δ.

6. Sia X un insieme totalmente ordinato.

   - Dimostrare che l'applicazione che associa $\max(a, b)$ (risp. $\min(a, b)$) alla coppia di elementi $(a, b) \in X \times X$ è una operazione binaria su X.

   - Stabilire se l'operazione $\max(a, b)$ (risp. $\min(a, b)$) è associativa e se è commutativa.

   - Determinare condizioni necessarie e sufficienti sull'insieme X affinché esista l'elemento neutro per l'operazione max (risp. min). Assumendo soddisfatte tali condizioni, determinare, se esistono, gli elementi simmetrizzabili.

   - Stabilire se valgono le proprietà distributive di min rispetto a max e viceversa su X.

   - Sia $X := \{5, 7, 24, 87\}$. Scrivere la tabella moltiplicativa di X con l'operazione max e con l'operazione min.

7. Stabilire se l'insieme $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ è un gruppo rispetto al prodotto cosi definito: $(a, b)(c, d) = (ac, bc + d)$.

8. Sia V l'insieme dei vettori nello spazio ordinario. Se $w \in V$, sia $\tau_w : V \longrightarrow V$, $v \to v + w$, la *traslazione* definita da w.

   Mostrare che l'insieme delle traslazioni $T = \{\tau_w \,;\, w \in V\}$ è un gruppo rispetto alla composizione di funzioni.

9. Siano

   $$U := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}\,; \quad V := \{z \in \mathbb{C}; z^n = 1 \text{ per un opportuno } n \geq 1\}.$$

Mostrare che U è un gruppo moltiplicativo (sottogruppo di $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$) e che V è un sottogruppo di U.

10. Verificare che l'anello $2\mathbb{Z}_{12}$ non è unitario, ma il suo sottoanello $4\mathbb{Z}_{12}$ lo è.

11. Sia A un anello. Verificare che l'insieme $\mathcal{M}_n(A)$ delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in A è un anello non commutativo rispetto alle usuali operazioni di addizione e moltiplicazione di matrici. Verificare inoltre che $\mathcal{M}_n(A)$ è unitario se e soltanto se lo è A.

12. Determinare gli elementi invertibili di $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

13. Verificare che
$$F := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \; ; \; a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$$
è un campo, rispetto alle usuali operazioni di addizione e moltiplicazione di matrici.

14. Si considerino le seguenti matrici di $GL_2(\mathbb{C})$
$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \; \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} ; \; \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \; \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$
- Verificare che valgono le relazioni:
$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1} \quad \text{e} \quad \mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}.$$
Sia
$$\mathcal{H} = \{a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \; ; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$
Se $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ poniamo $\overline{q} = a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$.

- Mostrare che $\mathcal{H}$ è un sottoanello di $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Inoltre, se $q \neq 0$, allora
$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{-1} q\overline{q} = \mathbf{1}.$$
Dedurne che $\mathcal{H}$ è un anello unitario e integro ma NON commutativo in cui ogni elemento non nullo ha un inverso.

$\mathcal{H}$ si chiama l'*algebra dei quaternioni reali.*

15. Siano $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{h} \in GL_2(\mathbb{C})$ le matrici definite nell'esercizio precedente e sia $\mathbf{1} = I_2$ la matrice unitaria. Mostrare che l'insieme $\mathbb{H} := \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{h}\}$ è un gruppo non commutativo.

    $\mathcal{H}$ si chiama il *gruppo delle unità dei quaternioni.*

16. Siano X un insieme e A un anello. Mostrare che l'insieme delle funzioni

    $$A^X := \{f : X \longrightarrow A\}$$

    dotato delle operazioni di addizione e moltiplicazione puntuale:

    $$(f+g)(x) = f(x) + g(x)\ ; \quad (fg)(x) = f(x)g(x)\ , \text{ per ogni } x \in X$$

    è un anello. Verificare inoltre che A^X è commutativo (risp. unitario) se e soltanto se lo è A.

17. Se A è un anello, un elemento $a \in A$ si dice *idempotente* se $a^2 = a$. L'anello A si dice *booleano* se ogni elemento di A è idempotente.

    Sia $(A; +, \cdot)$ un anello e B l'insieme degli elementi idempotenti di A.

    - Mostrare che se A è un dominio, allora $B = \{0, 1\}$;

    - Determinare B quando A è l'anello delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$;

    - Mostrare con un esempio che B non è necessariamente un sottoanello di A;

    - Mostrare che $(B; \oplus, \cdot)$, dove

    $$x \oplus y = x + y - 2xy$$

    è un anello booleano.

18. Sia X un insieme. Mostrare che l'insieme delle funzioni

    $$\mathbb{Z}_2^X := \{f : X \longrightarrow \mathbb{Z}_2\}$$

    dotato delle operazioni di addizione e moltiplicazione puntuale:

    $$(f+g)(x) = f(x) + g(x)\ ; \quad (fg)(x) = f(x)g(x)\ , \text{ per ogni } x \in X$$

    è un anello unitario booleano.

19. Un elemento a di un anello A si dice *nilpotente* se $a^k = 0$ per qualche $k \geq 1$.

    Mostrare che, se $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ è la fattorizzazione di n in numeri primi, allora $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ è nilpotente se e soltanto se p_i divide a per $i = 1, \dots, s$.

    Da questo fatto, dedurre che, se p è primo, ogni elemento di $\mathbb{Z}_{p^k}$ è invertibile oppure nilpotente.

20. Sia A un anello, verificare che l'insieme $A[X]$ dei polinomi a coefficienti in A è un anello rispetto alle usuali operazioni di addizione e moltiplicazione di polinomi. Verificare inoltre che l'anello $A[X]$ è commutativo (risp. unitario) se e soltanto se lo è A.

21. Sia A un anello unitario. Mostrare che il polinomio $u + aX \in A[X]$ è invertibile se e soltanto se u è invertibile ed a è nilpotente.

    Determinare poi esplicitamente l'inverso del polinomio $\bar{5}+\bar{6}X \in \mathbb{Z}_{12}[X]$.

22. Sia $d \in \mathbb{Z}$. Mostrare che l'insieme $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \{a + b\sqrt{d}\,; a, b \in \mathbb{Z}\}$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$. Determinare poi il gruppo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}[i]$ e $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$.

23. Determinare esplicitamente il gruppo degli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}_n$ per $2 \leq n \leq 15$.

24. Dimostrare che l'anello $\mathbb{Z}_n$ delle classi resto modulo n è un campo se e soltanto se $n = p$ è un numero primo.