Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2016/2017
AL210 - Esercizi 2

1. Sia K un campo. Mostrare che i seguenti sottoinsiemi di $M(n, K)$ sono gruppi rispetto alla moltiplicazione righe per colonne:

   - $Gl(n, K) = \{A \in M(n, K);\, detA \neq 0\}$ (*gruppo lineare generale di grado* n);

   - $SL(n, K) = \{A \in M(n, K);\, detA = 1\}$ (*gruppo lineare speciale di grado* n);

   - $O(n, K) = \{A \in M(n, K);\, A^{-1} = A^t\}$ (*gruppo ortogonale di grado* n);

   - $SO(n, K) = SL(n, K) \cap O(n, K)$ (*gruppo ortogonale speciale di grado* n).

2. Calcolare l'ordine delle seguenti permutazioni:
   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 9 & 8 & 2 & 3 & 10 & 7 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$;
   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 3 & 9 & 10 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

3. Determinare l'ordine di tutti gli elementi di $\mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{30}$.

4. Calcolare l'ordine dei seguenti elementi nel gruppo moltiplicativo dei numeri complessi:
   $$1 + i, \quad -1, \quad -i, \quad \cos(\pi/5) + i \sin(\pi/5), \quad \sqrt{3}/2 + 1/2.$$

5. Siano G un gruppo ciclico finito di ordine n , $d > 0$ un divisore di n e $H = \{x \in G; x^d = 1\}$. Provare che H è un sottogruppo di G di ordine d.

6. Sia G un gruppo tale che $x^2 = 1$, per ogni $x \in G$. Provare che G è commutativo.

7. Dimostrare, per induzione su n, che ogni elemento non nullo di $\mathbb{Z}_2^n$ ha ordine 2.

8. Sia G un gruppo finito. Provare che:

   (a) L'insieme $A = \{x \in G \mid x^2 \neq 1\}$ ha un numero pari di elementi;

   (b) Se l'ordine di G è pari, allora G ha almeno un elemento di ordine 2.

9. Determinare tutti gli elementi di ordine 2, 3, 4 di S_4. Esistono elementi di ordine diverso?

10. Nel gruppo $GL_2(\mathbb{R})$ siano

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

    Determinare l'ordine di a e l'ordine di b. Mostrare poi che l'ordine di ab è infinito.

11. Siano A un insieme e $(G, \cdot)$ un gruppo moltiplicativo. Indichiamo con $\mathcal{F}(A, G)$ l'insieme di tutte le applicazioni $f : A \longrightarrow G$.

    Mostrare che:

    (a) $(\mathcal{F}(A, G), \cdot)$ è un gruppo con l'operazione definita nel seguente modo: se $f, g \in \mathcal{F}(A, G)$, allora $fg : A \longrightarrow G$ è l'applicazione definita da

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

    (b) Se G è finito, ogni $f \in \mathcal{F}(A, G)$ ha ordine finito.

12. Siano a, b elementi di un gruppo G di ordine n e m rispettivamente. Mostrare che se $ab = ba$ e $MCD(m, n) = 1$, allora ab ha ordine mn.

13. Siano G un gruppo ciclico finito di ordine n , $d > 0$ un divisore di n e $H = \{x \in G; x^d = 1\}$. Provare che H è un sottogruppo di G di ordine d.

14. Determinare il gruppo delle radici n-sime dell'unità per $n = 3, 4, 5, 6, 12$ e le relazioni di inclusione tra di essi.

15. Siano p e q due interi coprimi. Provare che il sottogruppo $\langle \frac{1}{p}, \frac{1}{q} \rangle$ di $(\mathbb{Q}, +)$ è ciclico, generato da $\frac{1}{pq}$.

16. Verificare che i seguenti gruppi sono ciclici: $U(\mathbb{Z}_{10}), U(\mathbb{Z}_{11}), U(\mathbb{Z}_{25})$.

17. Mostrare che il gruppo $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{15})$ ha un sottogruppo di ordine 4 che non è ciclico.

18. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$. Verificare che gli insiemi $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ e $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{ax + by\,;\ x, y \in \mathbb{Z}\}$ sono sottogruppi di $\mathbb{Z}$ e determinare un loro generatore.

19. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo e sia S un sottoinsieme di G. Il più piccolo sottogruppo di G contenente S si chiama il *sottogruppo di G generato da S* e si indica con $\langle S \rangle$. Mostrare che

$$\langle S \rangle = \{s_1^{z_1} \dots s_n^{z_n}\,; s_i \in S, z_i \in \mathbb{Z}, i = 1 \dots, n\}.$$

20. Mostrare che S_n è generato da uno qualsiasi dei seguenti sottoinsiemi:

    (1) tutti i cicli; (2) tutte le trasposizioni.

21. Determinare il sottogruppo di S_4 generato da (24) e (1234).