Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2016/2017
AL210 - Esercizi 3

1. Siano $(G, *)$ e $(G', *')$ due gruppi. Mostrare che:

   (a) $G \times G'$ è un gruppo con l'operazione "componente per componenete" definita da
   $$(g, g')(h, h') = (g * h, g' *' h').$$
   Tale gruppo si chiama il *prodotto diretto* di G e G'.

   (b) $G \times G'$ è commutativo se e soltanto se lo sono G e G'.

   (c) Se $g \in G$ ha ordine n e $g' \in G'$ ha ordine m, allora $(g, g') \in G \times G'$ ha ordine $mcm(n, m)$.

   (d) Se G è ciclico di ordine n e G' è ciclico di ordine m, allora $G \times G'$ è ciclico se e soltanto se $MCD(n, m) = 1$. In tal caso determinare i suoi generatori.

   (e) Se $G \times G'$ è ciclico, allora G e G' sono ciclici.

2. Verificare direttamente che $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ è un gruppo ciclico rispetto alla somma sulle componenti. Esplicitare i suoi generatori e determinare tutti i suoi sottogruppi.

3. Provare che il gruppo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ non è ciclico.

4. Sia G un gruppo moltiplicativo e sia
   $$Z(G) := \{x \in G\,; xg = gx \text{ per ogni } g \in G\}.$$
   Mostrare che $Z(G)$ è un sottogruppo di G. $Z(G)$ si chiama il *centro* di G.

5. Determinare il centro di $\mathbf{S_3}, \mathbf{D_4}, \mathbf{H}$ (gruppo delle unità dei quaternioni).

6. Sia K un campo. Determinare il centro di $GL_2(K)$.

7. Siano G e G' due gruppi e sia $G \times G'$ il loro prodotto diretto, con l'usuale operazione sulle componenti. Mostrare che $Z(G \times G') = Z(G) \times Z(G')$.

8. Verificando il teorema di Lagrange, determinare tutti i sottogruppi, e le loro relative classi laterali, dei gruppi : $(\mathbb{Z}_{18}, +)\,;\quad (U(\mathbb{Z}_{15}), \cdot)$.

9. Sia $G = \Big\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0\Big\}$.

   (a) Mostrare che G è un gruppo con l'operazione $\cdot$ definita come:
   $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + b)$

   (b) G è abeliano?

   (c) Dopo aver verificato che $H = \Big\{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Q}, a \neq 0\Big\}$ è un sottogruppo di G, descriverne le classi laterali destre e sinistre.

10. Siano H e K due sottogruppi finiti di un gruppo G. Provare che se gli interi $|H|$ e $|K|$ sono primi tra loro, allora $H \cap K = \{e\}$.

Ricordare che un sottogruppo H di un gruppo G si dice *normale* in G se $gH = Hg$, per ogni $g \in G$

1. Mostrare che il centro di G è un sottogruppo normale di G.

2. Mostrare che il gruppo ortogonale speciale di grado n su $\mathbb{R}$, $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R})\,; \det(A) = 1\}$, è un sottogruppo normale di indice 2 del gruppo ortogonale $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R})\,; A^{-1} = A^t\}$.

3. Siano:
   $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}; \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R}, ab \neq 0 \right\}$
   Dimostrare che N e H sono sottogruppi di $GL_2(\mathbb{R})$, N è normale in H, H non è normale in $GL_2(\mathbb{R})$.

4. Determinare tutti i sottogruppi del gruppo alterno $\mathbf{A_4}$. Verificare che $\mathbf{A_4}$ non ha sottogruppi di ordine 6.

5. Si considerino i seguenti sottogruppi di $\mathbf{A_4}$:

   $$H := \langle (12)(34) \rangle; \quad V_4 := \langle (12)(34), (14)(23) \rangle.$$

   Si dimostri che H è normale in V_4, V_4 è normale in $\mathbf{A_4}$ ma H non è normale in $\mathbf{A_4}$.

6. Sia $H := \{\sigma \in \mathbf{S_4} \;\; \sigma(\mathbf{1}) = \mathbf{1}\}$.

   (a) Verificare che H è un sottogruppo di $\mathbf{S_4}$ e descriverne le classi laterali destre e sinistre.

   (b) Stabilire se H è normale in $\mathbf{S_4}$.

7. Determinare il reticolo dei sottogruppi del gruppo $\mathbf{H}$ delle unità dei quaternioni. Verificare inoltre che ogni sottogruppo è ciclico e normale in $\mathbf{H}$.