Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2017/2018
AL210 - Esercizi 4

1. Sull'insieme $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si definisca l'operazione $\cdot$ ponendo per ogni $(x, y, z), (u, v, w) \in G$

$$(x, y, z) \cdot (u, v, w) = (x + (-1)^z u,\ y + v,\ z + w)$$

(a) Dimostrare che G con questa operazione è un gruppo non abeliano.

(b) Dimostrare che il sottoinsieme $N = \mathbb{Z}\times\{0\}\times\{0\}$ di G è un sottogruppo normale di G e che $G/N \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(c) Calcolare il centro di G.

2. Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo di ordine 2. Mostrare che H è normale in G se e soltanto se H è contenuto nel centro di G.

3. Sia G un gruppo commutativo e sia ρ la relazione su G definita ponendo, per ogni $x, y \in G$;

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow (xy^{-1})^2 = e.$$

(a) Provare che ρ è una relazione di equivalenza.

(b) Verificare che $[e]_\rho$ è un sottogruppo normale di G.

(c) Assumendo che $[e]_\rho = \{e\}$, determinare $[x]_\rho$ per ogni $x \in G$.

4. Sia $G = \{x + iy\,;\ x, y \in \mathbb{Z}\}$ e sia $f : (G, +) \longrightarrow (G, +)$ l'applicazione definita da $f(x + iy) = x + y$.

(a) Provare che l'applicazione f è un endomorfismo di G;

(c) Determinare nucleo ed immagine di f.

(b) Dimostrare che $\ker(f)$ è ciclico e trovare un suo generatore.

5. Verificare che l'applicazione

$$\varphi : (M_2(\mathbb{Z}), +) \to (\mathbb{Z}, +)\,; \quad f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a$$

è un omomorfismo di gruppi.

Determinare $\ker(\varphi)$, descrivere il gruppo quoziente $M_2(\mathbb{Z})/\ker(\varphi)$ e definire l'isomorfismo canonico $\overline{\varphi} : M_2(\mathbb{Z})/\ker(\varphi) \longrightarrow Im(\varphi)$.

6. Determinare tutti i possibili omomorfismi

$$S_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_6\,; \quad \mathbb{Z}_6 \longrightarrow S_3.$$

7. Sia $\mathbf{H}$ il gruppo delle unità dei quaternioni.

Determinare almeno un omomorfismo non nullo $\varphi : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{Z}_\mathbf{4}$ ed applicare il Teorema di Omomorfismo.

8. Sia G un gruppo ciclico di ordine 4 e sia G' un gruppo di Klein. Determinare tutti i possibili omomorfismi $G \longrightarrow G'$ e $G' \longrightarrow G$.

9. Determinare tutti i possibili omomorfismi $\mathbf{H} \to \mathbf{D_4}$ e $D_4 \to \mathbf{H}$.

10. Determinare il gruppo degli automorfismi dei gruppi $\mathbb{Z}_{24}$, $\mathbb{Z}_{91}$.

11. Determinare il gruppo degli automorfismi del gruppo $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{11})$.

12. Sia G il gruppo delle radici complesse n-sime dell'unità. Determinare il gruppo degli automorfismo di G per $n = 7, 14, 21$.

13. Verificare che l'applicazione

$$(Aut(\mathbb{Z}_n), \circ) \longrightarrow (\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n), \cdot)\,; \quad \varphi \mapsto \varphi(\bar{1})$$

è un isomorfismo di gruppi.

14. Dimostrare che il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{Z}_p$, p primo, è ciclico di ordine $p-1$.

15. Siano $(G, +)$ e $(G', +)$ gruppi commutativi. Mostrare che l'insieme costituito da tutti gli omomorfismi di G in G' è un gruppo commutativo rispetto all'operazione *somma puntuale* definita da

$$(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$$

Tale gruppo si indica con $\mathrm{Hom}(G, G')$.

16. Determinare esplicitamente i gruppi
$$(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{30}, \mathbb{Z}_{21}), +), \quad (\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{21}, \mathbb{Z}_{30}), +).$$

17. (<u>Facoltativo</u>) Si consideri l'applicazione

$$\alpha : (\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m), +) \longrightarrow \mathbb{Z}_m; \quad \phi \longrightarrow \phi([1]_n).$$

Mostrare che:

(a) α è un omomorfismo di gruppi iniettivo;

(b) $\mathrm{Im}(\alpha)$ è il sottogruppo di $\mathbb{Z}_m$ generato dalla classe $[m/d]_m$, con $d = MCD(n, m)$.
Dedurne che $(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m), +)$ è un gruppo ciclico di ordine d.