**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2017/2018**
**AL210 - Esercizi 5**

1. Siano $G$ un gruppo e $H$ un sottogruppo di $G$; dimostrare che:

   (a) per ogni $g \in G$, l'insieme $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\}$, è un sottogruppo di $G$.

   (b) L'applicazione $H \longrightarrow gHg^{-1}$, $h \mapsto ghg^{-1}$ è una biiezione.

   (c) Se $H \subseteq G$ è l'unico sottogruppo di $G$ che ha ordine finito uguale a $n$, allora H è normale in G.

2. (a) Mostrare che in un gruppo due elementi coniugati hanno lo stesso ordine.

   (b) Mostrare che due elementi $x, y$ di un gruppo $G$ sono coniugati se e soltanto se esistono $a, b \in G$ tali che $x = ab$ e $y = ba$.

   Dedurne che, per ogni $h, g \in G$, gli elementi $hg$ e $gh$ hanno lo stesso ordine.

3. In un gruppo infinito $G$, sia $F$ l'insieme degli elementi che hanno un numero finito di coniugati distinti. Provare che $F$ un sottogruppo normale di G.

4. Mostrare che se $\pi \in \mathbf{S_n}$ e $\gamma = (a_1, a_2, , a_r)$ è un $r$-ciclo, allora
   $$\pi \circ \gamma \circ \pi^{-1} = (\pi(a_1), \pi(a_2), \ldots, \pi(a_r)).$$

   Dedurne che tutti gli $r$-cicli sono coniugati in $\mathbf{S_n}$.

5. (a) Verificare che la classe di coniugio di (123) in $A_4$ (attenzione, non in $S_4$ !) è composta da quattro elementi.

   (b) Determinare le classi di coniugio di $A_4$ e $S_4$. Inoltre, per ciascuna classe, determinare il centralizzante di un rappresentante della classe.

   (c) Determinare, utilizzando le classi di coniugio, i sottogruppi normali di $A_4$.

6. Sia $\sigma \in \mathbf{S}_5$ un 5-ciclo. Mostrare che il centralizzante di $\sigma$ in $\mathbf{S}_5$ è il sottogruppo ciclico $\langle\sigma\rangle$. Dedurne che i 5-cicli si ripartiscono in due classi coniugate di $\mathbf{A_5}$, benché essi siano tutti coniugati in $\mathbf{S_5}$.

   (Ricordare che il numero degli $n$-cicli distinti di $\mathbf{S}_n$ è $(n-1)!$).

7. Determinare le classi di coniugio di $\mathbf{A}_5$ e verificare l'equazione delle classi.

   Ragionando sui possibili ordini, mostrare che nessun sottogruppo di $\mathbf{A}_5$ puó essere unione di classi coniugate. Quindi $\mathbf{A}_5$ non ha sottogruppi normali.

8. Identificare $D_4$ ad un sottogruppo di $\mathbf{S_4}$ e determinare due elementi di $D_4$ che sono coniugati in $\mathbf{S_4}$ ma non in $D_4$.

9. Determinare esplicitamente le classi di coniugio di $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{H}$, $D_4$ e verificare l'equazione delle classi.

10. Determinare il gruppo degli automorfismi interni di $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{H}$, $D_4$.

11. Un sottogruppo $H$ di un gruppo $G$ si dice *caratteristico* se $\alpha(H) = H$, per ogni $\alpha \in Aut(G)$.

    Mostrare che ogni sottogruppo caratteristico è normale. Mostrare inoltre che un gruppo di Klein non ha sottogruppi caratteristici.

12. Mostrare che un sottogruppo finito di un gruppo $G$ che è unico del suo ordine è caratteristico.

13. Mostrare che il centro di un gruppo è un sottogruppo caratteristico.

14. Sia $D_6$ il gruppo delle isometrie dell'esagono regolare. Mostrare che $D_6$ è isomorfo al sottogruppo $G$ di $\mathbf{S}_6$ generato da $\delta = (26)(35)$ e $\rho = (123456)$.

    Determinare inoltre le classi coniugate di $G$.