Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2017/2018
AL210 - Esercizi 6

1. Siano I e J due ideali in un anello commutativo A. Verificare che:

   (a) $IJ := \{\sum_{finite} x_i y_i \,; x_i \in I,\, y_i \in J\}$, $I \cap J$,
   $I + J := \{x + y\,; x \in I,\, y \in J\}$ sono ideali di A;

   (b) $I + J := \langle I \cup J \rangle$ è il più piccolo ideale contenente $I \cup J$;

   (c) $IJ \subseteq I \cap J$ e se $I + J = A$ allora $IJ = I \cap J$.

2. Si considerino in $\mathbb{Z}$ gli ideali $I = 126\mathbb{Z}$ e $J = 84\mathbb{Z}$. Determinare gli ideali $I + J$, $I \cap J$, IJ.

3. Determinare tutti gli ideali di $\mathbb{Z}_{60}$. Determinare inoltre la struttura degli anelli quoziente $\mathbb{Z}_{60}/\bar{5}\mathbb{Z}_{60}$ e $\mathbb{Z}_{60}/\overline{15}\mathbb{Z}_{60}$. Quanti elementi hanno? Sono integri? Sono campi?

4. Siano I, J, H ideali di A. Mostrare che se $H \subseteq I \cup J$ allora $H \subseteq I$ oppure $H \subseteq J$.

5. Sia $A = M_n(K)$ l'anello delle matrici $n \times n$ a entrate in un campo K.

   Dimostrare che ogni matrice $M \in A$ è invertibile oppure è uno zero-divisore.

   Mostrare con un esempio che ciò non è vero se al posto di K si prende $\mathbb{Z}$.

6. Sia $H := \left\{ \begin{pmatrix} z & \bar{w} \\ -w & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}$

   (a) Provare che H è un sottoanello di $M_2(\mathbb{C})$.

   (b) H è commutativo?

   (c) Descrivere il gruppo degli elementi invertibili di H.

7. Sia ξ una radice primitiva n-sima dell'unità e sia

   $$\mathbb{Z}[\xi] := \{a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots + a_{n-1}\xi^{n-1}\,;\, a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

   Mostrare che $\mathbb{Z}[\xi]$ è un sottoanello del campo dei numeri complessi. (Per $\xi = i$, $\mathbb{Z}[i]$ si chiama l'*anello degli interi di Gauss*).

8. Si consideri l'insieme:

   $$A := \left\{ \frac{m}{1 + 2n}, m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

   Verificare che A con le usuali operazioni di addizione e moltiplicazioni tra numeri è un anello commutativo unitario.

   Determinare $U(A)$ e dimostrare che $A \setminus U(A)$ è un ideale di A.

9. Sia A un anello commutativo unitario. Mostrare che $(a) = (ua)$, per ogni $u \in \mathcal{U}(A)$.

10. Sia S un insieme. Ricordiamo che l'insieme $\mathcal{P}(S)$ delle parti di S è un anello, con l'addizione definita dalla differenza simmetrica e la moltiplicazione definita dall'intersezione.

    (a) Sia $X \subseteq S$. Verificare che $\mathcal{P}(X) = X\mathcal{P}(S)$ è un ideale di $P(S)$.

    (b) Mostrare che l'insieme dei sottoinsiemi finiti di S è un ideale di $\mathcal{P}(S)$.

11. Sia A un anello, l'annullatore destro di un elemento $a \in A$ è definito come: $Ann_d(a) := \{x \in A; ax = 0\}$. Analogamente si definisce l'annullatore sinistro di $a \in A$ come: $Ann_s(a) := \{x \in A; xa = 0\}$

    (a) Provare che $Ann_d(a)$ è un ideale destro di A e $Ann_s(a)$ è un ideale sinistro di A.

    (b) Se $A := M_2(\mathbb{R})$ trovare gli annullatori destri e sinistri di

    $$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad N := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

    (c) Descrivere gli annullatori degli elementi di $A = \mathbb{Z}_n$.

12. Sia A un anello e

    $$Nil(A) = \{a \in A\,;\ a^n = 0, \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}\}$$

    l'insieme degli elementi nilpotenti di A.

    Mostrare che $Nil(A)$ è un ideale di A. ($Nil(A)$ si chiama il *nilradicale* di A).

13. Nel campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi sia definita la seguente relazione: $\forall z, w \in \mathbb{C}, z \sim w$ se la parte reale di $z - w$ è nulla.

    (a) Verificare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

    (b) Descrivere la classe di equivalenza del numero $z := (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})^2$.

    (c) Dimostrare che la relazione $\sim$ è compatibile con l'addizione di $\mathbb{C}$.

    (d) Stabilire se la classe di equivalenza di 0 è un ideale di $\mathbb{C}$.

14. Considerare l'applicazione $\psi : M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z}_8)$ tale che

    $$\psi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \bar{a} \pmod 8 & \bar{b} \pmod 8 \\ \bar{c} \pmod 8 & \bar{d} \pmod 8 \end{pmatrix}.$$

    Mostrare che ψ è un omomorfismo di anelli e determinarne il nucleo e l'immagine.