Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2017/2018
AL210 - Esercizi 7

1. Siano A, B anelli non nulli e sia $C = A \times B$ il loro prodotto diretto.
- (a) Dimostrare che C è un anello con le operazioni definite sulle componenti:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'); \quad (a, b)(a', b') = (aa', bb').$$

- (c) C è commutativo (risp. unitario) se e soltanto se lo sono sia A che B .
- (d) Se A e B sono unitari, $\mathcal{U}(C) = \mathcal{U}(A) \times \mathcal{U}(B)$.
- (e) C non è integro.

2. Siano A, B anelli unitari. Un omomorfismo $\varphi : A \rightarrow B$ si dice *unitario* se $\varphi(1) = 1$.

- (a) Verificare che l'applicazione

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad a \mapsto (a, 0)$$

è un omomorfismo non unitario.

- (b) Dimostrare che un omomorfismo suriettivo è unitario.

(b) Dimostrare che se B è integro, ogni omomorfismo $\varphi : A \rightarrow B$ è unitario.

3. *Teorema Cinese dei Resti* Sia R un anello commutativo ed unitario. Siano I, J due suoi ideali e sia

$$\varphi : R \rightarrow R/I \times R/J; \quad r \mapsto (r + I, r + J).$$

Dimostrare che:

- (a) φ è un omomorfismo unitario di anelli.
- (b) φ è suriettivo se, e solo se, $I + J = R$.
- (c) Il nucleo di φ è $I \cap J$.
- (d) Se φ è suriettivo, c'è un isomorfismo canonico

$$\frac{R}{I \cap J} \rightarrow R/I \times R/J, \quad r + I \cap J \mapsto (r + I, r + J).$$

(e) Nel caso $R = \mathbb{Z}$, $I = 5\mathbb{Z}$, $J = 12\mathbb{Z}$, si dimostri che $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

4. Sia $A = \mathbb{Z}_{(15)} := \{ \frac{m}{15^t} \in \mathbb{Q}; m, t \in \mathbb{Z}, t \geq 0 \}$.

- (a) Verificare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.
- (b) Determinare gli elementi invertibili di A .
- (c) Se I è un ideale di A , provare che $I \cap \mathbb{Z}$ è un ideale di $\mathbb{Z}$.
- (d) Provare che se I è primo o massimale allora $I \cap \mathbb{Z}$ è primo o massimale in $\mathbb{Z}$.

5. Sia $v_3 : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ definita da:
 $v_3(x) = n$ se 3^n divide x e 3^{n+1} non divide x .

Posto

$$A = \left\{ \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} ; v_3(x) - v_3(y) \geq 0 \right\} \cup \{0\},$$

- (a) Mostrare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}$;
 (b) Determinare il gruppo degli elementi invertibili di A ;
 (c) Mostrare che $3A$ è l'unico ideale massimale di A .
6. Sia $A = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \text{ e } 5 \nmid b \right\}$
 (a) Dimostrare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.
 (b) Determinare gli elementi invertibili di A .
 (c) Sia $\phi : A \rightarrow \mathbb{Z}_5$ definita da

$$\phi\left(\frac{a}{b}\right) = \bar{a}\bar{b}^{-1}.$$

Dimostrare che ϕ è un omomorfismo di anelli e applicare il teorema di omomorfismo.

- (d) Mostrare che $\ker \phi$ è l'unico ideale massimale di A .
7. Si consideri l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}_n ; \quad f = a + Xg(X) \mapsto \bar{a}.$$

- (a) Mostrare che φ è un omomorfismo suriettivo di anelli.
 (b) Verificare che $\text{Ker}(\varphi) = \langle n, X \rangle$.
 (c) Stabilire per quali valori di n l'ideale $\langle n, X \rangle$ è primo o massimale.
8. Sia $A \subseteq B$ una inclusione di anelli commutativi unitari e sia $I \subseteq A$ un ideale.
 (a) Mostrare che $IB = \left\{ \sum_{finita} a_i b_i ; a_i \in I, b_i \in B \right\}$ è un ideale di B .
 (b) L'ideale $I = 2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ è primo, ma l'ideale $2\mathbb{Z}[i] \subseteq \mathbb{Z}[i]$ non è primo.

9. Sia $A \subseteq B$ una inclusione di anelli e sia $J \subseteq B$ un ideale.

Mostrare che:

- (a) $I = J \cap A$ è un ideale di A .
 (b) Se J è primo, I è primo.

10. Sia A un dominio e sia I un ideale di A . Mostrare che

- (a) L'insieme $I[X]$ dei polinomi a coefficienti in I è un ideale di $A[X]$ e $I[X] \cap A = I$;
 (b) I è primo se e soltanto se $I[X]$ è primo;
 (c) Se J è un ideale (risp. un ideale primo) di $A[X]$, $I = J \cap A$ è un ideale (risp. un ideale primo) di A e $I[X] \subseteq J$.
 (d) L'ideale $J = \langle 2, X^2 \rangle \subseteq \mathbb{Z}[X]$ non è primo, ma $J \cap \mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$ è primo e $I[X] = 2\mathbb{Z}[X] \subseteq J$.

11. Sia A un anello commutativo unitario. Dimostrare che se ogni ideale $I \neq A$ è primo, allora A è un campo.
12. Mostrare che l'intersezione di due ideali primi che non siano l'uno contenuto nell'altro non è un ideale primo.
13. Mostrare che l'intersezione di una catena discendente di ideali primi è un ideale primo.
14. Mostrare che il campo dei quozienti di $\mathbb{Z}[X]$ è $\mathbb{Q}(X)$, cioè il campo delle funzioni razionali su $\mathbb{Q}$.
15. Dare un esempio di un campo infinito di caratteristica finita uguale a p .