Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2017/2018
AL210 - Esercizi 8

1. Siano A un dominio a ideali principali, $x, y \in A$ non nulli. Si dimostri che:

   (a) $(x) + (y) = (d)$, dove e $d = (x, y)$ è un massimo comune divisore di x e y.

   (b) $(x) \cap (y) = (m)$, dove $m = xyd^{-1}$.

2. Sia A un dominio euclideo rispetto alla valutazione v e sia $x \in A$.

   Si dimostri che x è irriducibile se e soltanto se, per ogni y che divide x, risulta $v(y) = v(x)$ oppure $v(y) = v(1)$.

3. Sia $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$. Dimostrare che se la norma di α è un numero primo, allora α è un elemento primo.

4. Sia $p \in \mathbb{Z}$ un numero primo. Dimostrare che p è un elemento primo di $\mathbb{Z}[i]$ se e soltanto se p non è somma di due quadrati.

   Determinare poi tutti i fattori propri di 2 e 5 in $\mathbb{Z}[i]$.

5. Sia $p \in \mathbb{Z}$ un numero primo. Mostrare che l'applicazione:

$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(p)} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}_p[X]}{(X^2+1)} \text{ definita da } a + bi + (p) \to \bar{a} + \bar{b}X + (X^2+1)$$

   è un isomorfismo di anelli.

   Dedurne che p è irriducibile in $\mathbb{Z}[i]$ se e soltanto se il polinomio $X^2 + 1$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_p[X]$.

6. Effettuare la divisione euclidea di $10 + 7i$ per $5 - 2i$ in $\mathbb{Z}[i]$. Mostrare che i possibili quozienti (e rispettivi resti) sono quattro.

7. Effettuare la divisione euclidea in $\mathbb{Z}[i]$ tra $\alpha = 13 + 18i$ e $\beta = 5 + 3i$. Calcolare un massimo comune divisore di α e β e una dentità di Bezout.

8. Usando l'algoritmo delle divisioni successive, determinare un massimo comune divisore di $10 + 7i$ e $5 - 2i$ in $\mathbb{Z}[i]$ ed una identità di Bezout per esso.

9. Si considerino in $\mathbb{Z}[i]$ gli ideali $I = (1 + 3i)$ e $J = (3 - 3i)$. Determinare gli ideali $I + J$ e $I \cap J$.

10. Dando per noto che l'anello $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ è euclideo rispetto alla norma complessa, effettuare la divisione di $5 + 2i\sqrt{2}$ per $2 + i\sqrt{2}$.