Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2017/2018
AL210 - Esercizi 9

1. Sia fissata la matrice : $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ e sia $I = \alpha^0$ la matrice identità di $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.
   Si consideri l'applicazione:
   $$\phi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) \,, \quad \textstyle\sum_{i=0}^n a_i X^i \to \sum_{i=0}^n a_i \alpha^i.$$
   Verificare che ϕ è un omomorfismo di anelli ed esplicitare $\mathrm{Im}(\phi)$ e $\mathrm{Ker}(\phi)$. Stabilire infine se $\mathrm{Im}(\phi)$ è un campo.

2. Si consideri l'insieme $A = \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$ in cui sono definite le seguenti operazioni:
   $$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \; ; \quad (a, b)(a', b') = (aa' + 5bb', ab' + a'b).$$
   Sappiamo che rispetto a queste operazioni, A è un anello commutativo unitario con unità $1_A = (1, 0)$.
   (a) Dimostrare che l'applicazione
   $$\varphi : \mathbb{Z}_7[X] \longrightarrow A \text{ definita da } \sum a_i X^i \to \sum (a_i, 0)(0, 1)^i$$
   è un omomorfismo di anelli;
   (b) Determinare Nucleo ed Immagine di φ ed applicare il Teorema di Omomorfismo per gli anelli;
   (c) Usando il punto precedente, mostrare che A è un campo. Quanti elementi ha A?

3. Sia $p\,(X) = X^2 + 3X + 1 \in \mathbb{Z}_7\,[X]$:
   (a) Dimostrare che $K = \mathbb{Z}_7\,[X] \,/\, (p(X))$ è un campo.
   (b) Descrivere esplicitamente gli elementi di K.
   (c) Determinare l'inverso di $X^3 + \overline{5}X + \overline{6} + (p\,(X))$ in K.

4. Si consideri l'insieme $J := \{m + i \cdot n | n, m \text{ pari }\} \subseteq \mathbb{Z}[i]$.

   (a) Si dimostri che J un ideale principale e si trovi un generatore in $\mathbb{Z}[i]$.

   (b) Si dica se J primo o massimale.

   (c) Si descrivano gli elementi dell'anello quoziente $A := \dfrac{\mathbb{Z}[i]}{J}$ classificando gli invertibili e i divisori dello zero.

5. In $\mathbb{Z}[i]$ siano $\alpha := 13 + 5i$ e $\beta := 8 + 9i$

   (a) Si calcoli $MCD(\alpha, \beta)$ e si scriva l'identit di Bezout.

   (b) Si determini $(\alpha) \cap (\beta)$ e $(\alpha) + (\beta)$.

   (c) Si stabilisca se i quozienti $\dfrac{\mathbb{Z}[i]}{(\alpha)}$ e $\dfrac{\mathbb{Z}[i]}{(\beta)}$ sono domini di integrità.

6. Determinare esplicitamente tutti gli elementi di:

$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(1+i)}, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(3)}, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(2+i)}.$$

7. Fattorizzare in elementi irriducibili i seguenti elementi di $\mathbb{Z}[i]$:

$$6\,,\ 10\,,\ 13\,,\ 21\,,\ 3+4i\,,\ -3+8i\,,\ 11+3i\,.$$

8. *Anelli di interi quadratici.* Sia $t \in \mathbb{Z}$ tale che $|\ t\ |$ non abbia fattori quadratici e sia $\mathbb{Z}[\sqrt{t}] = \{a + b\sqrt{t} \ \ | \ a; b \in \mathbb{Z}\}$. Se $\alpha = a + b\sqrt{t}$, definiamo la *norma* di α come

$$N(\alpha) = (a + b\sqrt{t})(a - b\sqrt{t}) = a^2 - b^2 t$$

   (Se $t < 0$, $N(\alpha)$ è la norma complessa).

   Mostrare che:

   (a) $\mathbb{Z}[\sqrt{t}]$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$ con campo dei quozienti $\mathbb{Q}[\sqrt{t}]$;

   (b) $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{t}]$;

   (c) $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{t}]$ è invertibile se e soltanto se $N(\alpha) = \pm 1$;

   (d) $\alpha, \beta \in Z[\sqrt{t}]$ sono associati se e soltanto se α divide β e $N(\alpha) = N(\beta)$;

(e) Se $\mid N(\alpha) \mid$ è un numero primo, allora α è irriducibile in $Z[\sqrt{t}]$;

(f) 7 è irriducibile in $Z[\sqrt{5}]$ (benché $N(7) = 49$ non sia primo).

9. Determinare i fattori irriducibili di 9 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ e $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.

10. Determinare i fattori irriducibili di 8 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

11. Dimostrare che, nell'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$, gli elementi 5 e $2 + i\sqrt{6}$ hanno massimo comune divisore uguale ad 1 , ma per 1 non esiste una identità di Bezout.

    Dimostare poi che gli elementi 10 e $4+2i\sqrt{6}$ non hanno massimo comune divisore.

    L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ è a fattorizzazione unica?

12. Fattorizzare su $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_3$ i seguenti polinomi:

$$f(X) = X^5+2X^4-5X^3-10X^2+6X+12\,; \quad g(X) = X^5-3X^4-X^3+3X^2+2X-6,;$$

$$h(X) = X^4 - X^2 - 1.$$

13. Verificare che le seguenti applicazioni sono omomorfismi di anelli e determinarne Nucleo ed Immagine:

    $\varphi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}\,; f(X) \to f(0)$;

    $\varphi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_n\,; f(X) \to \overline{f(0)}$;

    $\varphi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_n\,; \sum a_i X^i \to \sum \overline{a_i} X^i$;

    $\varphi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}\,; f(X) \to f(i)$;

    $\varphi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{R}\,; f(X) \to f(\sqrt[3]{2})$.

14. Sia $R := A[X]/I$. Stabilire se R è un dominio o un campo in ciascuno dei seguenti casi :

    (a) $A := \mathbb{Q}$, $I := (X^2 - 1)$; (b) $A := \mathbb{Q}$, $I := (X^3 + X + 1)$;

    (c) $A := \mathbb{Z}$, $I := (2X^2 + 2)$; (d) $A := \mathbb{Z}_3$, $I := (X^3 + X + \bar{1})$.

    Determinare inoltre gli ideali massimali di R .

15. Sia $K = \mathbb{Z}_p$. Mostrare che se $f(X) \in K[X]$ è un polinomio irriducibile di grado n, l'anello quoziente $K[X]/(f(X))$ è un campo con p^n elementi.

16. Studiare l'anello quoziente $A = \dfrac{\mathbb{Z}_5[X]}{(X^2 + aX + \bar{1})}$, determinando per quali valori del parametro $a \in \mathbb{Z}_5$ esso è un campo.

    Determinare inoltre tutti gli ideali di A nei casi in cui $a = \bar{0}$ e $a = \bar{1}$.

17. Siano $f(X) = X^3 + aX^2 + \bar{5}X + \bar{3} \in \mathbb{Z}_7[X]$ e $I = (f(X))$.

    Determinare se l'anello quoziente $Z_7[X]/I$ è un campo per i valori $a = \bar{4}$ e $a = \bar{5}$. In caso affermativo determinare l'inverso della classe del polinomio $g(X) = X^2 + \bar{2}$.

18. Stabilire se l'ideale principale generato da 5 è primo in $\mathbb{Z}[X]$ e in $\mathbb{Z}[i]$. Determinare poi in entrambi gli anelli un ideale massimale che lo contiene.

19. Sia $f(x) = x^2 - 2$. Stabilire se $I = (f(x))$ è primo o massimale nei seguenti anelli: $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}][X]$, $\mathbb{Z}[i][X]$, $\mathbb{Z}_6[X]$ e $\mathbb{Z}_3[X]$.

20. Dimostrare che il polinomio $Y^n + XY^{n-1} + X^2Y^{n-2} + \cdots + X^{n-1}Y + X$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[X, Y]$.