Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2017/2018
AL210 - Prima prova di valutazione intermedia
7 Novembre 2017

*Cognome*___________________ *Nome*_____________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenza: Svolgere il maggior numero di esercizi giustificando tutte le affermazioni fatte. **Non è consentito l'uso di alcun ausilio esterno** (libri, appunti, telefono, tablet, computer, calcolatrice...).

1. Sia G un gruppo commutativo e si consideri l'applicazione

$$\varphi : G \times G \longrightarrow G\,; \quad (x, y) \mapsto xy^{-1}$$

(a) Verificare che φ è un omomorfismo di gruppi.

(b) Calcolare il nucleo e l'immagine di φ.

(c) Definire l'isomorfismo canonico

$$\overline{\varphi} : \frac{G \times G}{Ker(\varphi)} \longrightarrow Im(\varphi).$$

(d) Determinare la controimmagine $\varphi^{-1}(g)$ del generico elemento $g \in G$.

2. Sia $G = \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{13})$ il gruppo delle unità di $\mathbb{Z}_{13}$.

(a) Dimostrare che G è ciclico e determinare i suoi generatori.

(b) Determinare il gruppo $Aut(G)$ degli automorfismi di G e stabilire se $Aut(G)$ è ciclico.

3. Siano

$$\alpha := (123)(156)(7624)(92), \beta := (14)(15)(63)(239)(145672)(478) \in \mathcal{S}_9.$$

(a) Dimostrare che esiste almeno una permutazione $\tau \in \mathcal{S}_9$ tale che $\beta = \tau\alpha\tau^{-1}$.

(b) Determinare espressamente un tale elemento τ.

4. Sia $G := GL_2(\mathbb{R})$ il gruppo delle matrici quadrate invertibili di ordine 2 a coefficienti reali e sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in G$.
   (a) Determinare il centralizzante $C(A)$ di A in G.
   (b) Stabilire se $C(A)$ è un sottogruppo normale di G.
5. Dimostrare che S_4 non può essere scritto come prodotto diretto di due suoi sottogruppi non banali.
6. Determinare tutti gli omomorfismi *non* suriettivi da S_3 in sé. Trovare anche un omomorfismo suriettivo.