Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2017/2018
AL210 - Appello A - 23 Gennaio 2018

Avvertenza: Svolgere il maggior numero di esercizi giustificando tutte le affermazioni fatte. **Non è consentito l'uso di alcun ausilio esterno** (libri, appunti, telefono, tablet, computer, calcolatrice...).

1. Sia G un gruppo (moltiplicativo) e sia $\mathcal{T}(G)$ il gruppo delle applicazioni biunivoche su G. Dati $g, h \in G$, definiamo l'applicazione
$$\gamma_{g,h} : G \longrightarrow G\,; \quad x \mapsto gxh^{-1}.$$
   (a) Dimostrare che $\gamma_{g,h} \in \mathcal{T}(G)$.
   (b) Dimostrare che l'applicazione
$$\varphi : G \times G \longrightarrow \mathcal{T}(G)\,; \quad (g, h) \mapsto \gamma_{g,h}$$
   è un omomorfismo di gruppi.
   (c) Determinare il nucleo di φ.
2. Determinare esplicitamente tutti gli automorfismi del gruppo $\mathbb{Z}_{20}$. Stabilire inoltre se essi formano un gruppo ciclico.
3. Sia $G = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ il gruppo moltiplicativo dei numeri razionali non nulli; sia H il sottogruppo generato dai p^2, per p che varia tra tutti i numeri primi.
   (a) Dimostrare che nessun numero primo p appartiene ad H.
   (b) Dimostrare che, se p e q sono numeri primi distinti, $p/q \notin H$.
   (c) Dedurne che il gruppo quoziente G/H è infinito.
4. Sia $\alpha := 2 + 2i \in \mathbb{Z}[i]$ e $A := \mathbb{Z}[i]/\langle\alpha\rangle$. Determinare gli zero-divisori di A e mostrare che essi formano un ideale di A.
5. Sia $A := \mathbb{Z}_2[X]$. Dimostrare che l'applicazione
$$\varphi : A \longrightarrow A\,; \quad f(X) \mapsto f(X)^2$$
   è un omomorfismo di anelli che è iniettivo, ma non suriettivo.
6. Si consideri l' omomorfismo di anelli
$$\varphi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}\,; \quad f(X) \mapsto f(\sqrt{2}).$$
   (a) Determinare il nucleo di φ, $I := Ker(\varphi)$.
   (b) Stabilire se I è un ideale primo o/e massimale.