Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2017/2018
AL210 - Appello B - 13 Febbraio 2018

Avvertenza: Svolgere il maggior numero di esercizi giustificando tutte le affermazioni fatte. **Non è consentito l'uso di alcun ausilio esterno** (libri, appunti, telefono, tablet, computer, calcolatrice...).

1. Sia G un gruppo commutativo e sia $T(G)$ l'insieme degli elementi di G che hanno ordine finito.

   (1) Dimostrare che $T(G)$ è un sottogruppo di G.

   (2) Dimostrare che se $\varphi : G \longrightarrow G'$ è un omomorfismo di gruppi, allora $\varphi(T(G)) \subseteq T(G')$.

   (3) Determinare $T(G)$ quando $G := (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ è il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi non nulli.

2. Sia D_5 il gruppo delle isometrie del pentagono regolare (gruppo diedrale di grado 5). Determinare esplicitamente tutti gli omomorfismi di gruppo $(D_5, \circ) \longrightarrow (\mathbb{Z}_{10}, +)$.

3. Consideriamo i seguenti elementi di S_6:

$$\begin{aligned}\sigma_1 :=& (145)(23)(53)(461)\\ \sigma_2 :=& (3164)(2351)(62)\\ \sigma_3 :=& (12345)(16)(23)(1234).\end{aligned}$$

   (1) Stabilire se $\sigma_i \in A_6$, per $i = 1, 2, 3$.

   (2) Determinare se σ_i e σ_j sono coniugate (per $i, j \in \{1, 2, 3\}$) e in caso affermativo determinare un $\gamma \in S_6$ tale che $\sigma_i = \gamma\sigma_j\gamma^{-1}$.

4. Si consideri l'anello prodotto diretto $A := \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ (con le operazioni definite sulle componenti).

   (1) Determinare la caratteristica di A.

   (2) Determinare gli zero-divisori, gli elementi nilpotenti e gli elementi invertibili di A.

5. Siano $\alpha := 3 - 5i, \beta := 17 \in \mathbb{Z}[i]$.

   (1) Determinare l'ideale $I := \langle\alpha\rangle \cap \langle\beta\rangle$.

   (2) Verificare che 2 è invertibile nell'anello quoziente $\frac{\mathbb{Z}[i]}{I}$ e determinare il suo inverso.

6. (1) Determinare due omomorfismi suriettivi distinti

$$\mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{Q}$$

ed esplicitare il loro nucleo.

(2) Dimostrare che non può esistere un omomorfismo suriettivo

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}[X].$$