Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2017/2018
AL210 - Appello C - 13 Giugno 2018

Avvertenza: Svolgere il maggior numero di esercizi giustificando tutte le affermazioni fatte. **Non è consentito l'uso di alcun ausilio esterno** (libri, appunti, telefono, tablet, computer, calcolatrice...).

1. Sia G un gruppo moltiplicativo commutativo e sia $m \geq 1$.

   (a) Verificare che l'insieme $G^m = \{x^m ; x \in G\}$ è un sottogruppo di G.

   (b) Mostrare che ogni elemento del gruppo quoziente G/G^m ha ordine finito.

   Sia poi $G = \langle g \rangle$ un gruppo ciclico di ordine n e supponiamo che m divida n.

   (c) Determinare un generatore di G^m.

   (d) Determinare un generatore di G/G^m.

2. Determinare il numero dei coniugati distinti in S_4 della permutazione $\sigma := (12)(34)$ (senza calcolarli esplicitamente).

3. Sia $\mathcal{M} := \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ l'insieme delle matrici reali di dimensione 2 e sia X il sottoinsieme di $\mathcal{M}$ formato dalle matrici A tali che $A+I$ è invertibile.

   (a) Mostrare che X è un gruppo rispetto alla legge di composizione definita da
   $$A * B = A + B + AB.$$

   (b) Definire un isomorfismo tra $(X, *)$ e il gruppo moltiplicativo di tutte le matrici invertibili di $\mathcal{M}$.

4. Sia $A := \mathbb{Z}[\sqrt{13}] = \{a + b\sqrt{13}\, ; a, b \in \mathbb{Z}\}$.

   (a) Verificare che 2 e $3 + \sqrt{13}$ sono irriducibili in A e non associati tra di loro.

   (b) Dimostrare che A non è a fattorizzazione unica.

5. Sia A un dominio a ideali principali. Dimostrare che se I è un ideale proprio di A (cioè $I \neq (0), A$), allora $I \neq I^2$.

6. Sia $\zeta \in \mathbb{C}$ una radice primitiva sesta dell'unità e si consideri l'omomorfismo
   $$\varphi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(X) \mapsto f(\zeta).$$
   Determinare il nucleo e l'immagine di φ e definire l'isomorfismo canonico
   $$\overline{\varphi} : \frac{\mathbb{Q}[X]}{Ker\varphi} \longrightarrow Im\varphi.$$