Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2003/2004
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 11 - Ideali Frazionari

1. Siano A un anello commutativo unitario non nullo e M un A-modulo. Siano poi $\{N_\alpha\}$ una famiglia di sottomoduli di M; $\{I_\alpha\}$ una famiglia di ideali di A; $N, L, H \in \{N_\alpha\}$ e $I, J \in \{I_\alpha\}$.

   Verificare che $(N :_M I) := \{x \in M\,;\, xI \subseteq N\}$ è un sottomodulo di M contente N. Inoltre valgono le seguenti proprietà:

   (a) $((N :_M I) :_M J) = (N :_M IJ) = ((N :_M J) :_M I)$;

   (b) $(\cap_\alpha N_\alpha :_M I) = \cap_\alpha (N_\alpha :_M I)$;

   (c) $(N :_M \sum_\alpha I_\alpha) = \cap_\alpha (N :_M I_\alpha)$.

Nel seguito A indica un dominio con campo dei quozienti K. Un *ideale frazionario* di A è un sotto A-modulo I di K tale che $(A :_A I) \neq (0)$.

2. Mostrare che:

   (a) I è un ideale frazionario se e soltanto se $I = \dfrac{1}{d}J$, dove $J \subseteq A$ è un ideale e $d \in A \setminus \{0\}$;

   (b) Se I è un sotto A-modulo di K finitamente generato, allora I è un ideale frazionario;

   (c) Ogni sotto A-modulo di un ideale frazionario è un ideale frazionario.

3. Siano I, J ideali frazionari di A. Mostrare che: IJ, $I \cap J$, $I + J$ e $(I :_K J) = \{x \in K\,;\, xJ \subseteq I\}$ sono ideali frazionari.

4. Mostrare che, se I è un ideale frazionario di A, allora $(I :_K I)$ è un sottoanello di K contenente A.

   Mostrare inoltre con un esempio che $(A :_K I)$ non è necessariamente un anello.

5. Mostrare che l'insieme $\mathcal{F}(A)$ degli ideali frazionari di A è un semigruppo rispetto alla moltiplicazione, con unità uguale ad A.

6. Un ideale frazionario I di A si dice *invertibile* se è invertibile nel semigruppo $\mathcal{F}(A)$, cioè se esiste un (unico) ideale frazionario J tale che $IJ = A$.

   Mostrare che se I è invertibile, allora il suo inverso è $(A :_K I)$.

7. Mostrare che un ideale frazionario invertibile è finitamente generato.

8. Sia I un ideale frazionario di A. Mostrare che l'applicazione

$$\varphi : \ (A :_K I) \longrightarrow Hom_A(I, A)\, ; \ (\varphi(x))(y) = xy$$

   è un isomorfismo di A-moduli.

   Per questo motivo l'ideale frazionario $(A :_K I)$ si dice anche il *duale* di I.

9. Sia $\bar{A}$ la chiusura integrale di A. Mostrare che:

   (a) $\bar{A} = \cup\{(I :_K I)\}$ al variare di I tra gli ideali finitamente generati di A;

   (b) A è integralmente chiuso se e soltanto se $(I :_K I) = A$, per ogni ideale finitamente generato di A.

   Sugg. Ricordare che se $A \subseteq B$ è un'estensione di anelli, x è intero su A se e soltanto se esiste un sotto A-modulo finitamente generato F di B tale che $x \in (F :_B F)$. Notare poi che, per ogni ideale frazionario I e $x \in K$, si ha $(xI :_K xI) = (I :_K I)$.