Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2003/2004

AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli

Esercizi 2 - Moduli e sottomoduli

Nel seguito A è un anello commutativo unitario non nullo; M è un A-modulo; $\{N_\alpha\}$ è una famiglia di sottomoduli di M; $\{I_\alpha\}$ è una famiglia di ideali di A; $N, L, H \in \{N_\alpha\}$ e $I, J \in \{I_\alpha\}$.

1. Sia G un gruppo abeliano additivo. Verificare che l'insieme $End(G)$ degli endomorfismi di G è un anello (generalmente non commutativo) con le operazioni di *addizione puntuale*, definita da $(\varphi+\psi)(x) = \varphi(x)+\psi(x)$ e la composizione di funzioni, definita da $(\varphi\psi)(x) = \varphi(\psi(x))$.

   Mostrare inoltre che l'applicazione $End(G)\times \mathrm{G} \longrightarrow G$, $(\varphi, x) \to \varphi(x)$ definisce una struttura di $End(G)$-modulo sinistro su G.

2. Per ogni $a \in A$, definiamo l'applicazione $\mu_a : M \longrightarrow M\,; m \to am$.

   Verificare che μ_a è un endomorfismo (A-lineare) di M e che l'applicazione $A \longrightarrow End(M)$ definita da $a \to \mu_a$ è un omomorfismo iniettivo di anelli.

3. $(*)$ Sia V uno spazio vettoriale sul campo K. Mostrare che, se φ è un K-endomorfismo di V, allora V assume una struttura di $K[X]$-modulo con la moltiplicazione scalare definita da:

   $$K[X] \times V \longrightarrow V\,; (\sum a_i X^i, v) \to \sum a_i \varphi^i(v).$$

   Viceversa, ogni modulo V su $K[X]$ è in particolare uno spazio vettoriale su K, inoltre la moltiplicazione per X,

   $$\mu_X : V \longrightarrow V\,; v \to Xv$$

   è un K-endomorfismo di V.

   In questo modo, si ha una biiezione tra l'insieme delle coppie (V, φ), dove V è un K-spazio vettoriale e φ è un K-endomorfismo di V, e l'insieme dei $K[X]$-moduli.

4. (∗) Verificare che $I \subseteq Ann(\frac{M}{IM})$ e quindi $\frac{M}{IM}$ ha una struttura di $\frac{A}{I}$ modulo, con la moltiplicazione scalare definita da $(a+I)(m+IM) = (am+IM)$.

   In particolare, se I è un ideale massimale di A, allora $\frac{M}{IM}$ è uno spazio vettoriale su $\frac{A}{I}$.

5. Sia G un gruppo abeliano additivo e $n \geq 2$. Mostrare che se $ng = 0$ per ogni $g \in G$, allora G è un modulo su $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.

6. Sia A un dominio integro. Un elemento $m \in M$ si dice di *torsione* se esiste $a \in A, a \neq 0$ tale che $am = 0$. Mostrare che l'insieme T degli elementi di torsione di M è un sottomodulo di M.

   M si dice un *modulo di torsione* se $M = T$, si dice *privo di torsione* se $T = 0$. Mostrare che $\frac{M}{T}$ è privo di torsione.

7. Mostrare che ogni gruppo abeliano finito è uno $\mathbb{Z}$-modulo di torsione.

8. Un A-modulo M si dice *fedele* se $Ann_A(M) = 0$.

   Verificare che se $I = Ann_A(M)$ allora M è un $\frac{A}{I}$-modulo fedele.

9. (∗) Verificare che $I = Ann_A(\frac{A}{I}) = (0 :_A A + I)$.

10. (∗) Verificare che $(N :_A L) = Ann(\frac{(N+L)}{N})$.

11. Mostrare che valgono le seguenti proprietà:

    (a) *Proprietà Distributiva*: $I(N+L) = IN + IL$;

    (b) *Legge Modulare*: Se $L \subseteq N$, allora $N \cap (L+H) = L + (N \cap H)$.

    Mostrare poi con un esempio che in generale, anche per gli ideali di A, risulta $N \cap (L+H) \neq (N \cap L) + (N \cap H)$.

12. (∗) Verificare che $\cap_\alpha N_\alpha$ e $\sum_\alpha N_\alpha = \{n_{\alpha_1} + \cdots + n_{\alpha_s}\,;\, n_{\alpha_i} \in N_{\alpha_i}\}$ sono sottomoduli di M.

    Verificare inoltre che:

    (a) $(\cap_\alpha N_\alpha : L) = \cap_\alpha (N_\alpha : L)$;

    (b) $(L : \sum_\alpha N_\alpha) = \cap_\alpha (L : N_\alpha)$.