Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2003/2004
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 3 - Omomorfismi di moduli

Nel seguito A è un anello commutativo unitario non nullo.

1. Siano M, M' A-moduli e sia N un sottomodulo di M. Mostrare che:

   (a) L'applicazione $\pi : M \longrightarrow \dfrac{M}{N}$ definita da $x \to x + N$ è un omomorfismo di A-moduli e il suo nucleo è N.

   (b) Se $\varphi : M \longrightarrow M'$ è un omomorfismo di A-moduli e $N \subseteq Ker(\varphi)$, allora l'applicazione $\overline{\varphi} : \dfrac{M}{N} \longrightarrow M'$ definita da $x + N \to \varphi(x)$ è ben definita ed è un omomorfismo di A-moduli.
   Inoltre $\varphi = \overline{\varphi}\pi$ e se $\psi : \dfrac{M}{N} \longrightarrow M'$ è un omomorfismo di A-moduli tale che $\varphi = \psi\pi$, allora $\psi = \overline{\varphi}$.

2. Siano H, M, N A-moduli. Dimostrare i seguenti *Teoremi di Isomorfismo*:

   (a) *Primo Teorema di Omomorfismo*: Se $\varphi : M \longrightarrow N$ è un omomorfismo di A-moduli, allora l'applicazione $\overline{\varphi} : \dfrac{M}{Ker(\varphi)} \longrightarrow Im(\varphi)$ definita da $x + Ker(\varphi) \to \varphi(x)$ è ben definita ed è un isomorfismo di A-moduli.

   (b) *Secondo Teorema di Omomorfismo*: L'applicazione $\dfrac{M}{M \cap N} \longrightarrow \dfrac{M+N}{N}$ definita da $x + (M \cap N) \to x + N$ è un isomorfismo di A-moduli.

   (c) *Terzo Teorema di Omomorfismo o Teorema del Doppio Quoziente*: Se $H \subseteq N \subseteq M$, allora l'applicazione $\dfrac{M/H}{N/H} \longrightarrow \dfrac{M}{N}$ definita da $(x + H) + N/H \to x + N$ è un isomorfismo di A-moduli.

3. (*) Verificare che l'applicazione $Hom_A(A, M) \longrightarrow M$ definita da $\alpha \to \alpha(1)$ è un isomorfismo di A-moduli.

4. Sia $\varphi : N \longrightarrow N'$ un omomorfismo di A-moduli. Mostrare che le applicazioni

$$Hom_A(M, N) \longrightarrow Hom_A(M, N')\,; \quad \alpha \to \varphi\alpha$$

$$Hom_A(N', M) \longrightarrow Hom_A(N, M)\,; \quad \alpha \to \alpha\varphi$$

sono omomorfismi di A-moduli.

5. Per ogni A-modulo H, indichiamo con $H^* := Hom_A(H, A)$ il *modulo duale* di H. Mostrare che l'applicazione

$$Hom_A(M, N) \longrightarrow Hom_A(N^*, M^*)\,; \quad \varphi \to \varphi^*,$$

dove $\varphi^* : N^* \longrightarrow M^*$ è definito da $\alpha \to \alpha\varphi$, è un omomorfismo di A-moduli.

(*) Mostrare poi con un esempio che H^* può essere il modulo nullo anche se H non lo è.

6. (*) Sia $\{M_\lambda\}$ una famiglia di A-moduli. Mostrare che, se $\iota_\lambda : M_\lambda \longrightarrow \bigoplus M_\lambda$ è la λ-esima iniezione canonica, allora l'applicazione

$$Hom_A(\bigoplus M_\lambda, N) \longrightarrow \prod Hom_A(M_\lambda, N)\,; \, \varphi \to (\varphi\iota_\lambda)$$

è un A-isomorfismo.

In particolare,

$$Hom_A(M_1 \times \cdots \times M_n, N) \backsimeq Hom_A(M_1, N) \times \cdots \times Hom_A(M_n, N).$$

7. (*) Mostrare che P è un A-modulo proiettivo (cioè P è un addendo diretto di un A-modulo libero) se e soltanto se ogni successione esatta di A-moduli

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

spacca.

Sugg. Usare la proprietà universale dei moduli liberi per mostrare che, se P è proiettivo, l'omomorfismo $N \longrightarrow P$ ha un inverso destro.