Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2003/2004
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 5 - Anelli di frazioni

Nel seguito A denota un anello commutativo unitario e S una sua parte moltiplicativa.

1. Sia X un sottoinsieme di A tale che $1 \in X$ e sia
$$S := S(X) := \{s_1 \dots s_k \,;\, s_i \in X \,, k \geq 1\}.$$
Mostrare che S è una parte moltiplicativa di A (che si dice la parte moltiplicativa *generata* da X).
Mostrare inoltre che se X è finito e non contiene zerodivisori, allora $A_S = A_s$ per un opportuno $s \in S$.

2. Sia A un dominio a fattorizzazione unica e sia $a \in A \setminus \{0\}$.
Determinare la saturazione della parte moltiplicativa $S = \{a^n\}_{n \geq 0}$.

3. Sia I un ideale di A. Determinare la saturazione della parte moltiplicativa $S = 1 + I = \{1 + a \,;\, a \in I\}$.

4. Sia $s \in A$ un elemento idempotente. Che possiamo dire di A_s?

5. Sia A un dominio e sia $S = A \setminus \{0\}$. Mostrare che $(A[X])_S = K[X]$, dove K è il campo dei quozienti di A.

6. Sia K un campo. Mostrare che il campo dei quozienti dell'anello delle serie formali $K[[X]]$ è l'anello delle *serie di Laurent*
$$K((X)) := \{\sum_{i \geq s} a_i X^i ; a_i \in K, s \in \mathbb{Z}\}.$$

7. Sia K un campo. Verificare che l'applicazione
$$K[X]_{(X)} \longrightarrow K[[X]] \,; \quad \frac{f(X)}{g(X)} \to f(X)g(X)^{-1}$$
è un isomorfismo di anelli locali.

8. Sia $S = 1 + (X) \subseteq A[X]$. Mostrare che l'anello delle frazioni $A[X]_S$ è contenuto isomorficamente nell'anello delle serie formali $A[[X]]$.

9. Sia K un campo e sia $S = \{X^n\}_{n\geq 1}$ la parte moltiplicativa di $K[X]$ generata da X. Verificare che gli anelli $K[X]_S$ e $K[X, X^{-1}]$ sono isomorfi.

10. Siano A un dominio di integrità, $P_1, \ldots, P_s$ ideali primi di A e $S = A \setminus (P_1 \cup \ldots \cup P_s)$. Mostrare che
$$A_S = A_{P_1} \cap \ldots \cap A_{P_s}.$$

11. Sia A un dominio a ideali principali con campo dei quozienti K e siano $p_1, \ldots, p_s$ elementi primi di A. Mostrare che
$$B := \{\frac{a}{b} \in K \quad \text{tali che} \quad p_1, \cdots, p_s \nmid b\}$$
è un sovranello di A i cui soli ideali primi sono $p_1B, \ldots, p_sB$.

12. Siano S, T due parti moltiplicative di A, con $S \subseteq T$. Mostrare che l'applicazione $A_S \longrightarrow A_T$ definita da $\frac{a}{s} \to \frac{a}{s}$ è un omomorfismo di anelli.

    Mostrare inoltre che tale omomorfismo è biiettivo se e soltanto se T è contenuto nella saturazione di S.

13. Sia $\phi : A \longrightarrow A_S$, $a \to \frac{a}{1}$ l'omomorfismo naturale e sia T una parte moltiplicativa di A. Mostrare che $ST = \{st, s \in S, t \in T\}$ è una parte moltiplicativa di A e che $A_{ST} \simeq (A_S)_{\phi(T)}$.

    Dedurne che, se $P \subseteq Q$ sono due ideali primi di A, allora $A_P = (A_Q)_{PA_Q}$.

14. Sia I un ideale di A e sia $T = \{s + I\,; s \in S\} \subseteq \frac{A}{I}$.

    Mostrare che T è una parte moltiplicativa di $\frac{A}{I}$ e
$$(\frac{A}{I})_T \simeq \frac{A_S}{I_S}.$$

    Dedurne che, se P è primo, il campo residuo dell'anello locale A_P è isomorfo al campo dei quozienti del dominio $\frac{A}{P}$.