Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2003/2004
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa - Prof. S. Gabelli
Esercizi 8 - Anelli Noetheriani

Nel seguito A è un anello commutativo unitario non nullo e I è un ideale di A.

1. Mostrare che se A è un dominio Noetheriano, allora ogni elemento di A è prodotto di un un numero finito di elementi irriducibili.

2. Siano $I_1, \dots, I_n$ ideali di A tali che $I_1 \cap \dots \cap I_n = (0)$. Mostrare che, se $\dfrac{A}{I_i}$ è noetheriano, allora A è noetheriano.

3. Mostrare che, se A è uno spazio vettoriale di dimensione finita su un suo sottocampo k, allora A è un anello noetheriano.

4. Dimostrare che, se A è noetheriano, anche l'anello delle serie formali $A[[X]]$ è noetheriano.

   Sugg. Adattare la dimostrazione del Teorema della Base, sostituendo il grado di un polinomio con l'ordine di una serie.

5. Mostrare che, se $\sqrt{I}$ è finitamente generato, allora $I \supseteq (\sqrt{I})^n$, per un opportuno $n \geq 1$.

   Dedurne che, se Q è un ideale P-primario di un anello noetheriano, allora $Q \supseteq P^{(n)} := P^n A_P \cap A$, per un opportuno $n \geq 1$.

6. Supponiamo che A sia noetheriano locale, con ideale massimale M. Dimostrare che $M^n \neq M^{n+1}$, per ogni $n \geq 1$ se e soltanto se M non è un primo minimale, ovvero in A esiste un primo P diverso da M.

   Dedurne che, se A è noetheriano e P non è minimale, allora $P^{(n)} \supsetneq P^{(n+1)}$, per ogni $n \geq 1$.

7. Dimostrare che se A è un dominio a ideali principali, ogni ideale proprio di A ammette una unica decomposizione primaria.

8. Sia K un campo e $A = K[X,Y,Z]/(X^2 - YZ)$. Determinare una decomposizione primaria dell'ideale principale generato dalla classe di X.