Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2003/2004

AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli

Esercizi 9 - Dipendenza integrale

Nel seguito A è un anello commutativo unitario non nullo.

1. Mostrare che $\mathbb{Z}[X_1, \dots , X_n]$ e $F[X_1, \dots , X_n]$, dove F è un campo, sono integralmente chiusi.

2. Sia d un intero privo di fattori quadratici. Se $a := x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, poniamo $\bar{a} = x - y\sqrt{d}$.

   Mostrare che, se $a + \bar{a}$, $a\bar{a} \in \mathbb{Z}$, allora a è intero su $\mathbb{Z}$.

3. Sia B un anello tale che $A \subseteq B$ e sia M un A-modulo. Mostrare che

   $$(M :_B M) = \{x \in B\,;\, xM \subseteq M\}$$

   è un sottoanello di B (contenente A) ed anche un sottoanello di $End_A(M)$.

4. Siano $A \subseteq B$ domini di integrità e sia $x \in B$. Mostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

   (a) x è intero su A;

   (b) Esiste un sotto A-modulo finitamente generato F di B tale che $x \in (F :_B F)$.

   Sugg. Usare il "trucco del determinante" usato per dimostrare il Teorema di Caylay-Hamilton.

5. Sia $A := \dfrac{\mathbb{Z}[X]}{X^2 + 4} = \mathbb{Z}[x]$, dove x denota la classe di X in A.

   Mostrare che A è un dominio integro, con campo dei quozienti $\mathbb{Q}[x]$. Inoltre $t = 4/x$ è intero su A, ma $t \notin A$.

   Dedurne che un anello quoziente di un dominio integralmente chiuso non è necessariamente integralmente chiuso.

6. sia $A = \dfrac{k[X,Y]}{Y^2 - X^3} = k[x,y]$, dove x e y denotano rispettivamente la classe di X e Y in A.

   Mostrare che A è un dominio integro con campo dei quozienti $k(x,y)$. Inoltre $t := y/x$ è intero su A, ma $t \notin A$. Mostrare infine che $\bar{A} = k[t]$.

7. Siano $A \subseteq B$ domini di integrità. Siano $Q \in Spec(B)$, $P := Q \cap A$ e $S := A \setminus P$.

   Mostrare che:

   (a) $A_P = A_S \subseteq B_S \subseteq B_Q$.

   (b) Se $\bar{A} = B$, allora $\overline{A_P} = B_S \subseteq B_Q$.

8. Siano $A := \mathbb{R}[X^2+1]$, $B := \mathbb{R}[X]$, $Q := (X^2+1)B$ e $P = Q \cap A$. Mostrare che:

   (a) $\bar{A} = B$;

   (b) $\dfrac{1}{X+1} \in B_Q \setminus \overline{A_P}$.

9. Sia B un anello tale che $A \subseteq B$ e sia $f(X) \in B[X]$. Mostrare che, se tutti i coefficienti di $f(X)$ sono interi su A, allora $f(X)$ è intero su $A[X]$.

10. Sia A un dominio di integrità. Mostrare che, se $A[X]$ è integralmente chiuso, allora A è integralmente chiuso.