Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2008/2009
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Prima prova intermedia

Nel seguito A denota un anello commutativo unitario non nullo.

1. Mostrare che se ogni ideale di A diverso da A è un ideale primo, allora A è un campo.

2. Siano $P_1, \dots, P_n \subseteq A$ ideali primi non comparabili e sia $I = P_1 \cap \dots \cap P_n$. Mostrare che l'applicazione

$$\frac{A}{I} \longrightarrow \frac{A}{P_1} \times \dots \times \frac{A}{P_n}\,; \quad a + I \to (a + P_1, \dots, a + P_n)$$

   è ben posta ed è un omomorfismo iniettivo di anelli.

   Verificare inoltre che se $A = K[X, Y]$, dove K è un campo, e $I = (X) \cap (Y)$ tale applicazione non è suriettiva.

3. Siano I, J_1, J_2 ideali di A. Mostrare che

$$I \subseteq J_1 \cup J_2 \quad \Rightarrow \quad I \subseteq J_1 \text{ oppure } I \subseteq J_2.$$

4. Sia G un gruppo abeliano additivo. Se $n \geq 0$ è un intero fissato, poniamo $nG := \{ng\,;\ g \in G\}$. Verificare che nG è un sottogruppo di G e che l'applicazione

$$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} G \longrightarrow \frac{G}{nG}\,; \quad (a + n\mathbb{Z}) \otimes g \mapsto ag + nG$$

   è un (ben definito) isomorfismo di gruppi.

5. Sia $S := \langle 6, 10 \rangle \subseteq \mathbb{Z}$ la parte moltiplicativa generata da 6 e 10. Determinare lo spettro primo dell'anello di frazioni $\mathbb{Z}_S$.

6. Siano A un dominio di integrità, $P_1, \dots, P_s$ ideali primi di A e $S = A \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_s)$. Mostrare che
$$A_S = A_{P_1} \cap \dots \cap A_{P_s}$$
e determinare gli ideali massimali di A_S.

7. Siano I un ideale di A e $S = 1 + I$. Mostrare che I_S è contenuto nel radicale di Jacobson di A_S.

8. Sia $p \in \mathbb{Z}$ un numero primo e si consideri l'ideale $M := (p, X)$ di $\mathbb{Z}[X]$. Mostrare che M è un ideale massimale e che l'ideale $I := (p^2, X)$ è M-primario.