Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Seconda prova intermedia

1. Siano K un campo, $A := K[\mathbf{X}] := K[X_1, \dots, X_n]$ l'anello dei polinomi in $n \geq 1$ indeterminate su K e $p(\mathbf{X}) \in A$ un polinomio irriducibile. Mostrare che l'ideale $P := \langle p(\mathbf{X}) \rangle$ è primo e che $K[\mathbf{X}]_P$ è un DVR.

2. Mostrare che ogni elemento non nullo e non invertibile di un dominio noetheriano è prodotto di elementi irriducibili.

3. Sia A un anello noetheriano e sia B un anello contenente A. Mostrare che un elemento $x \in B$ è intero su A se e soltanto se $A[x]$ è contenuto in un sotto A-modulo finitamente generato di B.

4. Sia $F \subseteq K$ un ampliamento algebrico di campi e sia $A := F + XK[X]$ il sottoanello di $K[X]$ formato dai polinomi con termine noto in F. Mostrare che:

   (1) A e $K[X]$ hanno lo stesso campo dei quozienti;

   (2) $K[X]$ è la chiusura integrale di A.

5. Si considerino gli ideali $P := 5\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ e $Q = (1 + 2i)\mathbb{Z}[i]$. Mostrare che:

   (1) $Q \cap \mathbb{Z} = P$;

   (2) $\mathbb{Z}_P \subseteq \mathbb{Z}[i]_Q$;

   (3) $\frac{1}{1-2i} \in \mathbb{Z}[i]_Q$ non è intero su $\mathbb{Z}_P$.

6. Mostrare che in un dominio di Dedekind ogni ideale proprio è un prodotto finito di ideali primi.

7. Sia A un anello artiniano e sia B una A-algebra. Mostrare che se B è un A-modulo finitamente generato B è un anello artiniano.

8. Mostrare che in un anello artiniano ogni elemento non invertibile è uno zerodivisore.