Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Appello B

Nel seguito A denota un anello commutativo unitario non nullo e k un campo.

1. Si verifichi che $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

2. Mostrare che se A è un UFD ogni ideale primo di altezza uno di A è principale.

3. Siano $P := 3\mathbb{Z}$ e $Q := 5\mathbb{Z}$.

   (1) Mostrare che $S := \mathbb{Z} \setminus (P \cup Q)$ è una parte moltiplicativa di $\mathbb{Z}$;

   (2) Descrivere gli elementi di $\mathbb{Z}_S$;

   (3) Esprimere $\mathbb{Z}_S$ come intersezione di localizzazioni in ideali primi.

4. Mostrare che l'ideale $\langle X^2, Y + aX\rangle \subseteq k[X,Y]$ è $\langle X, Y\rangle$-primario, per ogni $a \in k$.

5. Sia $I := \langle X^2, XY, XZ, ZY\rangle \subseteq k[X,Y,Z]$. Mostrare che una decomposizione primaria ridotta dell'ideale I è
$$I = \langle X, Y\rangle \cap \langle X, Z\rangle \cap \langle X, Y, Z\rangle^2.$$

6. Sia $A \subseteq B$ un'estensione di anelli. Mostrare che se B è un A-modulo finitamente generato allora $\dim(B) = \dim(A)$.

7. Sia A un anello noetheriano di dimensione ≤ 1. Mostrare che ogni ideale proprio di A è prodotto di ideali primari.

8. Dimostrare che il prodotto diretto di un numero finito di campi è un anello artiniano.