Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Appello C

Nel seguito A denota un anello commutativo unitario non nullo e k un campo.

1. Dimostrare che l'omomorfismo
$$n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n\,; \quad nz \otimes \overline{a} \mapsto nz \otimes \overline{a}$$
non è iniettivo.

2. Sia $S \subseteq A$ una parte moltiplicativa priva di zerodivisori. Mostrare che l'applicazione
$$A[X]_S \longrightarrow A_S[X]\,; \quad \frac{\sum a_i X^i}{s} \mapsto \sum \frac{a_i}{s} X^i$$
è un isomorfismo.

3. Sia $N := Nil(A)$ il nilradicale di A. Mostrare che A/N è un campo se e soltanto se ogni elemento di A è invertibile oppure è nilpotente.

4. Sia A un dominio a ideali principali e $J := Jac(A)$ il suo radicale di Jacobson. Mostrare che $J = (0)$ se e soltanto se A è un campo oppure ha un numero infinito di ideali massimali.

5. Si consideri l'anello $A := \mathbb{Z}[\sqrt[4]{2}, i]$.
   (a) Stabilire se A è intero su $\mathbb{Z}$;
   (b) Calcolare $\dim(A)$;
   (c) Stabilire se A è Noetheriano e/o Artiniano.

6. Sia A un anello noetheriano e sia P un suo ideale primo. Dimostrare che l'ideale $P^{(n)} := P^n \cap A$ è P-primario.

7. Sia A un anello artiniano. Si dimostri che l'ideale (0) è prodotto di un numero finito di ideali massimali.

8. Sia $P \subseteq K[X]$ un ideale primo non nullo. Si dimostri che l'anello $K[X]_P$ è di valutazione discreta.