Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 5 - Zero divisori e nilpotenti

Nel seguito denotiamo con $A := (A, +, \cdot)$ un anello commutativo unitario.

1. Mostrare che:
   (a) l'unità di A è unica;
   (b) Se $a \in A$ è invertibile, il suo inverso è unico;
   (c) L'insieme $\mathcal{U}(A)$ degli elementi invertibili di A è un gruppo moltiplicativo.

2. Mostrare che l'insieme degli elementi invertibili di A e l'insieme degli zero-divisori di A sono disgiunti.

3. Un elemento $a \in A$ si dice *idempotente* se $a^2 = a$; si dice *nilpotente* se esiste un intero $n \geq 1$ tale che $a^n = 0$. Sia ora $a \neq 0, 1$; mostrare che:
   (a) Se a è nilpotente, allora a è uno zero-divisore;
   (b) Se a è idempotente, allora a è uno zero-divisore;
   (c) Se a è nilpotente, allora a non è idempotente;
   (d) Se a è nilpotente, allora ab è nilpotente, per ogni $b \in A$;
   (e) Se $u \in A$ è invertibile e a è nilpotente, allora $u + ab$ è invertibile, per ogni $b \in A$.

4. Mostrare che:
   (a) L'insieme $\mathcal{N}il(A)$ degli elementi nilpotenti di A è un ideale di A;
   (b) L'insieme $\mathcal{I}demp(A)$ degli elementi idempotenti di A non è necessariamente un sottoanello di A;
   (c) $(\mathcal{I}demp(A); *, \cdot)$, dove

   $$x * y = x + y - 2xy$$

   è un anello.

5. Sia $n \geq 2$ e $n = p_1^{e_1} \dots p_s^{e_s}$ la sua fattorizzazione in numeri primi.

   Mostrare che $[a]_n \in \mathbb{Z}_n$ è nilpotente se e soltanto se p_i divide a, per $i = 1, \dots, s$.

6. Sia $f(X) := a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in A[X]$. Mostrare che:

   (a) $f(X)$ è invertibile se e soltanto se a_0 è invertibile e a_i è nilpotente per $i \geq 1$.

   (b) $f(X)$ è nilpotente se e soltanto se a_i è nilpotente per $i \geq 0$.

   (c) $f(X)$ è uno zero-divisore se soltanto se esiste $a \in A$ tale che $af(X) = 0$.

7. Determinare esplicitamente gli elementi invertibili, nilpotenti ed idempotenti dei seguenti anelli:

$$\mathbb{Z}_8, \quad \mathbb{Z}_{12}, \quad \mathbb{Z}_{19}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \quad \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2), \quad \mathbb{Z}_{12}[X], \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

8. Un anello A si dice *booleano* se ogni elemento di A è idempotente, cioè $a^2 = a$, per ogni $a \in A$.

   Sia A un anello booleano unitario. Mostrare che:

   (a) $2a = 0$, per ogni $a \in A$ (cioè A ha caratteristica 2);

   (b) $ab = aba = ba$, per ogni $a, b \in A$, in particolare A è commutativo;

   (c) A è integro se e soltanto se A è un campo con 2 elementi.

9. Sia X un insieme. Mostrare che l'insieme delle funzioni

$$\mathbb{Z}_2^X := \{f : X \longrightarrow \mathbb{Z}_2\}$$

   dotato delle operazioni di addizione e moltiplicazione puntuale:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \ ; \quad (fg)(x) = f(x)g(x) \ , \text{ per ogni } x \in X$$

   è un anello unitario booleano.