Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa - Prof. S. Gabelli
Esercizi 11 - Anelli Noetheriani

Nel seguito A è un anello commutativo unitario non nullo e I è un ideale di A.

1. Siano $I_1, \ldots, I_n$ ideali di A tali che $I_1 \cap \ldots \cap I_n = (0)$. Mostrare che, se $\dfrac{A}{I_i}$ è noetheriano, allora A è noetheriano.

2. Dimostrare che, se A è noetheriano, anche l'anello delle serie formali $A[[X]]$ è noetheriano.

   Suggerimento. Adattare la dimostrazione del Teorema della Base, sostituendo il grado di un polinomio con l'ordine di una serie.

3. Se P è un ideale primo di A, indichiamo con $P^{(n)} = P^{ec}$ (estensione e contrazione in A_P) la potenza n-sima simbolica di P. Mostrare che, se Q è un ideale P-primario di un anello noetheriano, allora $Q \supseteq P^{(n)}$, per un opportuno $n \geq 1$.

4. Supponiamo che A sia noetheriano locale, con ideale massimale M. Dimostrare che $M^n \neq M^{n+1}$, per ogni $n \geq 1$ se e soltanto se M non è un primo minimale, ovvero in A esiste un primo P diverso da M.

   Dedurne che, se A è noetheriano e P non è minimale, allora $P^{(n)} \supsetneq P^{(n+1)}$, per ogni $n \geq 1$.

5. Sia K un campo e $A := K[X, Y, Z]/(X^2 - YZ) = K[x, y]$. Determinare una decomposizione primaria dell'ideale principale generato dalla classe x di X.

6. Sia $A := \mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1) = \mathbb{R}[x, y]$. Si dimostri che:

   (1) A è una $\mathbb{R}$-algebra integra;

   (2) A non è a fattorizazione unica.

   Suggerimento. Mostrare che x^2 ha due fattorizzazioni "distinte" in elementi irriducibili.

7. Sia A un dominio a fattorizzazione unica di caratteristica diversa da 2. Sia $a \in A$ privo di fattori quadratici e $B := A[X]/(X^2 - a)$. Dimostrare che:

   (1) $B := A[X]/(X^2 - a)$ è una A-algebra integra;

   (2) B è integralmente chiusa;

   (3) A e B hanno la stessa dimensione.

8. Costruire una k-algebra artiniana con tre ideali primi ed esprimerla come prodotto di anelli locali.

9. Mostrare che se un prodotto diretto finito di campi (con le operazioni definite sulle componenti) è un anello noetheriano è anche artiniano.

10. Mostrare che $A := \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{15}$ è un anello artiniano e determinare lo spettro primo di A.