Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2008/2009
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 1 - Moduli e sottomoduli

Nel seguito A è un anello commutativo unitario non nullo; M è un A-modulo; $\{N_\alpha\}$ è una famiglia di sottomoduli di M; $\{I_\alpha\}$ è una famiglia di ideali di A; $N, L, H \in \{N_\alpha\}$ e $I, J \in \{I_\alpha\}$.

1. Sia G un gruppo abeliano additivo. Verificare che l'insieme $End(G)$ degli endomorfismi di G è un anello (generalmente non commutativo) con le operazioni
   $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ (*addizione puntuale*)
   $(\varphi\psi)(x) = \varphi(\psi(x))$ (*composizione di funzioni*).

   Mostrare inoltre che l'applicazione
   $$End(G) \times G \longrightarrow G, \quad (\varphi, x) \to \varphi(x)$$
   definisce su G una struttura di $End(G)$-modulo sinistro.

2. Per ogni $a \in A$, definiamo l'applicazione
   $$\mu_a : M \longrightarrow M\,; \quad m \to am.$$
   Verificare che μ_a è un endomorfismo (A-lineare) di M e che l'applicazione
   $$A \longrightarrow End(M)\,; \quad a \to \mu_a$$
   è un omomorfismo iniettivo di anelli.

3. Sia V uno spazio vettoriale sul campo K. Mostrare che, se φ è un K-endomorfismo di V, allora V assume una struttura di $K[X]$-modulo con la moltiplicazione scalare definita da:
   $$K[X] \times V \longrightarrow V\,; \quad (\sum a_i X^i, v) \to \sum a_i \varphi^i(v).$$
   Viceversa, ogni modulo V su $K[X]$ è in particolare uno spazio vettoriale su K, inoltre la moltiplicazione per X,
   $$\mu_X : V \longrightarrow V\,; \quad v \to Xv$$

è un K-endomorfismo di V.

In questo modo, si ha una biiezione tra l'insieme delle coppie (V, φ), dove V è un K-spazio vettoriale e φ è un K-endomorfismo di V, e l'insieme dei $K[X]$-moduli.

4. Verificare che $I \subseteq Ann(\frac{M}{IM})$ e quindi $\frac{M}{IM}$ ha una struttura di $\frac{A}{I}$ modulo, con la moltiplicazione scalare definita da

$$(a + I)(m + IM) = (am + IM).$$

   In particolare, se I è un ideale massimale di A, allora $\frac{M}{IM}$ è uno spazio vettoriale su $\frac{A}{I}$.

5. Sia G un gruppo abeliano additivo e $n \geq 2$. Mostrare che se $ng = 0$ per ogni $g \in G$, allora G è un modulo su $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.

6. Sia A un dominio integro. Un elemento $m \in M$ si dice di *torsione* se esiste $a \in A, a \neq 0$ tale che $am = 0$. Mostrare che l'insieme T degli elementi di torsione di M è un sottomodulo di M.

   M si dice un *modulo di torsione* se $M = T$, si dice *privo di torsione* se $T = 0$. Mostrare che $\frac{M}{T}$ è privo di torsione.

7. Mostrare che ogni gruppo abeliano finito è uno $\mathbb{Z}$-modulo di torsione.

8. Un A-modulo M si dice *fedele* se $Ann_A(M) = 0$.

   Verificare che se $I = Ann_A(M)$ allora M è un $\frac{A}{I}$-modulo fedele.

9. Verificare che $I = Ann_A(\frac{A}{I}) = (0 :_A A + I)$.

10. Verificare che $(N :_A L) = Ann(\frac{(N+L)}{N})$.

11. Mostrare che valgono le seguenti proprietà:

    (a) *Proprietà Distributiva*: $I(N + L) = IN + IL$;

    (b) *Legge Modulare*: Se $L \subseteq N$, allora $N \cap (L + H) = L + (N \cap H)$.

    Mostrare poi con un esempio che in generale, anche per gli ideali di A, risulta $N \cap (L + H) \neq (N \cap L) + (N \cap H)$.

12. Verificare che $\cap_\alpha N_\alpha$ e $\sum_\alpha N_\alpha = \{n_{\alpha_1} + \cdots + n_{\alpha_s}\,;\, n_{\alpha_i} \in N_{\alpha_i}\}$ sono sottomoduli di M.

    Verificare inoltre che:

    (a) $(\cap_\alpha N_\alpha : L) = \cap_\alpha (N_\alpha : L)$;
    (b) $(L : \sum_\alpha N_\alpha) = \cap_\alpha (L : N_\alpha)$.

13. Verificare che $(N :_M I) := \{x \in M\,;\, xI \subseteq N\}$ è un sottomodulo di M contente N. Inoltre valgono le seguenti proprietà:

    (a) $(N :_M I) :_M J) = (N :_M IJ) = (N :_M J) :_M I)$;
    (b) $(\cap_\alpha N_\alpha :_M I) = \cap_\alpha (N_\alpha :_M I)$;
    (c) $(N :_M \sum_\alpha I_\alpha) = \cap_\alpha (N :_M I_\alpha)$.

Ideali frazionari di un dominio

Se A è un *dominio* con campo dei quozienti K, un *ideale frazionario* di A è un sotto A-modulo I di K tale che $(A :_A I) \neq (0)$.

1. Mostrare che:

    (a) I è un ideale frazionario se e soltanto se $I = \dfrac{1}{d} J$, dove $J \subseteq A$ è un ideale e $d \in A \setminus \{0\}$;
    (b) Se I è un sotto A-modulo di K finitamente generato, allora I è un ideale frazionario;
    (c) Ogni sotto A-modulo di un ideale frazionario è un ideale frazionario.

2. Siano I, J ideali frazionari di A. Mostrare che:

$$IJ\,; \quad I \cap J\,; \quad I + J\,; \quad (I :_K J) = \{x \in K\,;\, xJ \subseteq I\}$$

    sono ideali frazionari.

3. Mostrare che, se I è un ideale frazionario di A, allora $(I :_K I)$ è un sottoanello di K contenente A.

    Mostrare inoltre con un esempio che $(A :_K I)$ non è necessariamente un anello.