

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2008/2009
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 2 - Omomorfismi di moduli

Nel seguito A è un anello commutativo unitario non nullo.

1. Siano M, M' A -moduli e sia N un sottomodulo di M . Mostrare che:

(a) L'applicazione

$$\pi : M \longrightarrow \frac{M}{N}; \quad x \rightarrow x + N$$

è un omomorfismo di A -moduli e il suo nucleo è N .

(b) Se $\varphi : M \longrightarrow M'$ è un omomorfismo di A -moduli e $N \subseteq \text{Ker}(\varphi)$, allora l'applicazione

$$\bar{\varphi} : \frac{M}{N} \longrightarrow M'; \quad x + N \rightarrow \varphi(x)$$

è ben definita ed è un omomorfismo di A -moduli.

Inoltre $\varphi = \bar{\varphi}\pi$ e se $\psi : \frac{M}{N} \longrightarrow M'$ è un omomorfismo di A -moduli tale che $\varphi = \psi\pi$, allora $\psi = \bar{\varphi}$.

2. Siano H, M, N A -moduli. Dimostrare i seguenti *Teoremi di Isomorfismo*:

(a) *Primo Teorema di Omomorfismo*: Se $\varphi : M \longrightarrow N$ è un omomorfismo di A -moduli, allora l'applicazione

$$\bar{\varphi} : \frac{M}{\text{Ker}(\varphi)} \longrightarrow \text{Im}(\varphi); \quad x + \text{Ker}(\varphi) \rightarrow \varphi(x)$$

è ben definita ed è un isomorfismo di A -moduli.

(b) *Secondo Teorema di Omomorfismo*: L'applicazione

$$\frac{M}{M \cap N} \longrightarrow \frac{M + N}{N}; \quad x + (M \cap N) \rightarrow x + N$$

è un isomorfismo di A -moduli.

- (c) *Terzo Teorema di Omomorfismo o Teorema del Doppio Quoziente:*
 Se $H \subseteq N \subseteq M$, allora l'applicazione

$$\frac{M/H}{N/H} \longrightarrow \frac{M}{N}; \quad (x+H) + N/H \rightarrow x + N$$

è un isomorfismo di A -moduli.

3. Verificare che l'applicazione $\text{Hom}_A(A, M) \longrightarrow M$ definita da $\alpha \rightarrow \alpha(1)$ è un isomorfismo di A -moduli.
4. Sia $\varphi : N \longrightarrow N'$ un omomorfismo di A -moduli. Mostrare che le applicazioni

$$\text{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_A(M, N'); \quad \alpha \rightarrow \varphi\alpha$$

$$\text{Hom}_A(N', M) \longrightarrow \text{Hom}_A(N, M); \quad \alpha \rightarrow \alpha\varphi$$

sono omomorfismi di A -moduli.

5. Per ogni A -modulo H , indichiamo con $H^* := \text{Hom}_A(H, A)$ il *modulo duale* di H . Mostrare con un esempio che H^* può essere il modulo nullo anche se H non lo è.
6. Sia I un ideale frazionario di A . Mostrare che l'applicazione

$$\varphi : (A :_K I) \longrightarrow \text{Hom}_A(I, A); \quad (\varphi(x))(y) = xy$$

è un isomorfismo di A -moduli.

Per questo motivo l'ideale frazionario $(A :_K I)$ si chiama anche il *duale* di I .

7. Mostrare che l'applicazione

$$\text{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_A(N^*, M^*); \quad \varphi \rightarrow \varphi^*,$$

dove

$$\varphi^* : N^* \longrightarrow M^*; \quad \alpha \rightarrow \alpha\varphi,$$

è un omomorfismo di A -moduli.

8. Sia $\{M_\lambda\}$ una famiglia di A -moduli. Mostrare che, se $\iota_\lambda : M_\lambda \longrightarrow \bigoplus M_\lambda$ è la λ -esima iniezione canonica, allora l'applicazione

$$\text{Hom}_A\left(\bigoplus M_\lambda, N\right) \longrightarrow \prod \text{Hom}_A(M_\lambda, N); \quad \varphi \longmapsto (\varphi \iota_\lambda)$$

è un A -isomorfismo.

In particolare,

$$\text{Hom}_A(M_1 \times \cdots \times M_n, N) \simeq \text{Hom}_A(M_1, N) \times \cdots \times \text{Hom}_A(M_n, N).$$

9. Mostrare che P è un A -modulo *proiettivo* (cioè P è un addendo diretto di un A -modulo libero) se e soltanto se ogni successione esatta di A -moduli

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

spacca.

Sugg. Usare la proprietà universale dei moduli liberi per mostrare che, se P è proiettivo, l'omomorfismo $N \longrightarrow P$ ha un inverso destro.