

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2008/2009
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 3 - Successioni esatte

Nel seguito consideriamo moduli su un fissato anello commutativo unitario A .

1. Sia $\mathcal{M}_n(A)$ l'anello delle matrici quadrate di dimensione n su A . Mostrare che A^n ha una struttura di $\mathcal{M}_n(A)$ -modulo destro e sinistro definite rispettivamente dalla moltiplicazione di matrici

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)(a_{ij}); \quad (a_{ij}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Mostrare inoltre che queste due strutture non coincidono.

2. Sia $f : M \rightarrow N$ un omomorfismo iniettivo di moduli. Mostrare che l'immagine Imf è un addendo diretto di N se e soltanto se esiste un omomorfismo $g : N \rightarrow M$ tale che $gf = id_M$ e che inoltre in questo caso risulta $N = Imf \oplus Kerg$.
3. Siano $f : L \rightarrow N, g : M \rightarrow N$ due omomorfismi di moduli in cui L è un modulo libero e g è suriettivo.

Mostrare che esiste un omomorfismo $h : L \rightarrow M$ tale che $f = gh$.

Suggerimento: Notare che, fissata una base $\{b_\lambda\}$ di L , per ogni λ esiste $m_\lambda \in M$ tale che $f(b_\lambda) = g(m_\lambda)$ ed usare la proprietà universale dei moduli liberi.

4. Sia P un modulo *proiettivo* (cioè un addendo diretto di un modulo libero L) e sia $g : M \rightarrow P$ un omomorfismo suriettivo. Mostrare che $M = P \oplus Kerg$.

Suggerimento: Mostrare che g ha un inverso destro usando l'esercizio precedente con $f : L \rightarrow P$ uguale alla proiezione canonica.

5. Mostrare che P è un A -modulo proiettivo se e soltanto se ogni successione esatta di A -moduli

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

spacca.

6. Sia

$$0 \longrightarrow L' \longrightarrow L \longrightarrow L'' \longrightarrow 0$$

una successione esatta di moduli liberi finiti. Dimostrare che il rango di L è la somma dei ranghi di L' e L'' .

7. Sia

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

una successione di moduli. Mostrare che la successione è esatta a destra (rispettivamente a sinistra) se e soltanto se, per ogni modulo M , la successione

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(N'', M) \longrightarrow \text{Hom}(N, M) \longrightarrow \text{Hom}(N', M)$$

(rispettivamente

$$\text{Hom}(M, N') \longrightarrow \text{Hom}(M, N) \longrightarrow \text{Hom}(M, N'') \longrightarrow 0)$$

è esatta.

Suggerimento: Se non riuscite, consultate gli appunti di Strano (Proposizioni 4.2, 4.3).

8. Studiare la dimostrazione del *Lemma del Serpente* (Lemma 4.1 degli appunti di Strano).