Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2008/2009
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 4 - Prodotto tensoriale

Nel seguito, se non specificato altrimenti, consideriamo moduli su un fissato anello commutativo unitario A.

1. Verificare che le seguenti applicazioni sono isomorfismi di moduli:

   (a) $A \otimes M \longrightarrow M\,; \quad a \otimes m \mapsto am;$

   (b) $M \otimes N \longrightarrow N \otimes M\,; \quad m \otimes n \mapsto n \otimes m;$

   (c) $(M \otimes N) \otimes L \longrightarrow N \otimes (M \otimes L)\,; \quad (m \otimes n) \otimes l \mapsto n \otimes (m \otimes l);$

   (d) $(M \oplus N) \otimes L \longrightarrow (M \otimes L) \oplus (N \otimes L)\,; \quad (m \oplus n) \otimes l \mapsto (m \otimes l) \oplus (n \otimes l).$

   Suggerimento: Usare la proprietà universale del prodotto tensoriale per verificare che le applicazioni sono ben definite.

2. Siano $M' \subseteq M$, $N' \subseteq N$ sottomoduli e sia $\Gamma \subseteq M \otimes N$ il sottomodulo generato dagli elementi $x \otimes y$ con $x \in M'$ oppure $y \in N'$. Mostrare che l'applicazione

   $$\frac{M}{M'} \otimes \frac{N}{N'} \longrightarrow \frac{(M \otimes N)}{\Gamma}\,; \quad (m + M') \otimes (n + N') \mapsto (m \otimes n) + \Gamma,$$

   è un isomorfismo di moduli.

   Suggerimento: Verificare che l'applicazione

   $$\frac{M}{M'} \times \frac{N}{N'} \longrightarrow \frac{(M \otimes N)}{\Gamma}\,; \quad (m + M', n + N') \mapsto (m \otimes n) + \Gamma$$

   è ben definita e lineare.

3. Usando l'esercizio precedente, mostrare che

   $$\frac{A}{I} \otimes_A \frac{A}{J} \cong \frac{A}{I + J}; \quad \mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_d, d := MCD(m, n).$$

4. Siano M, N, L moduli. Per ogni applicazione bilineare $f : M \times N \longrightarrow L$ e $m \in M$, indichiamo con $f(m, -) : N \longrightarrow L$ l'applicazione lineare definita da $n \mapsto f(m, n)$ e poniamo

$$\varphi(f) : M \longrightarrow Hom(N, L)\,; \quad m \mapsto f(m, -).$$

Mostrare che l'applicazione

$$\varphi : Hom(M \otimes N, L) \longrightarrow Hom(M, Hom(N, L))\,; \quad f \mapsto \varphi(f)$$

è un ben definito isomorfismo lineare, con inverso definito da

$$\psi : Hom(M, Hom(N, L)) \longrightarrow Hom(M \otimes N, L)\,; \quad f \mapsto \psi(f),$$

dove

$$\psi(f) : M \otimes N \longrightarrow L\,; \quad m \otimes n \mapsto f(m)(n).$$

5. Se $f : M_1 \longrightarrow M_2$ è un fissato omomorfismo di moduli e P un qualsiasi modulo, consideriamo gli omomorfismi definiti da

$$\overline{f} : Hom(M_2, P) \longrightarrow Hom(M_1, P)\,; \quad \alpha \mapsto \alpha f$$

$$f \otimes id_P : M_1 \otimes P \longrightarrow M_2 \otimes P\,; \quad m_1 \otimes p \mapsto f(m_1) \otimes p.$$

Dati poi due moduli N e L, sia

$$\varphi_i : Hom(M_i \otimes N, L) \longrightarrow Hom(M_i, Hom(N, L)),$$

$i = 1, 2$, l'omomorfismo definito come nell'esercizio precedente. Verificare che il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
Hom(M_2 \otimes N, L) & \xrightarrow{\overline{f \otimes id_L}} & Hom(M_1 \otimes N, L) \\
\varphi_2 \big\downarrow & & \varphi_1 \big\downarrow \\
Hom(M_2, Hom(N, L)) & \xrightarrow{\overline{f}} & Hom(M_1, Hom(N, L))
\end{array}$$

è commutativo, .

6. Seguendo le linee di dimostrazione indicate a lezione ed usando i due esercizi precedenti, dimostrare l'esattezza a destra del prodotto tensoriale.

7. Siano B una A-algebra e M un B-modulo. Verificare che se M è finito su B (generato da $m_1, \ldots, m_r$) e B è finito su A (come A-modulo, generato da $b_1, \ldots, b_s$), allora M è finito su A (generato da $\{b_i m_j\}$).

8. Siano B una A-algebra, M un A-modulo ed
$$\epsilon : M \longrightarrow B \otimes_A M\,; \quad m \mapsto 1 \otimes m$$
l'applicazione canonica. Mostrare che

   (a) Se M è generato da $\{m_\lambda\}$ su A, $B \otimes_A M$ è generato da $\{1 \otimes m_\lambda\}$ su B.

   (b) Se N è un B-modulo, per ogni applicazione A-lineare $f : M \longrightarrow N$ esiste una unica applicazione B-lineare $g : M \otimes_A B \longrightarrow N$ tale che $f = g\epsilon$ (ovvero $f(m) = g(1 \otimes m)$).

   Suggerimento: Considerare l'applicazione A-bilineare
$$B \times M \longrightarrow N\,; \quad (b, m) \mapsto bf(m).$$

9. Siano B una A-algebra e M un A-modulo libero, con base $\{m_\lambda\}$. Dimostrare che $B \otimes_A M$ è un B-modulo libero, con base $\{1 \otimes m_\lambda\}$.

   Suggerimento: Verificare che l'applicazione canonica $\epsilon : M \longrightarrow B \otimes_A M$ è iniettiva.

10. Siano L_1, L_2 moduli liberi di rango finito rispettivamente uguale a r_1, r_2. Mostrare che $L_1 \otimes L_2$ è libero di rango $r_1 r_2$.

11. Sia B una A-algebra. Mostrare che
$$A[X] \otimes_A B \cong B[X]\,; \quad A[X] \otimes_A A[Y] \cong A[X, Y].$$

12. Siano A e B due anelli. N si chiama un (A, B)-*modulo* se è contemporaneamente un A-modulo ed un B-modulo e le due strutture sono compatibili, cioè $(am)b = a(mb)$, per ogni $a \in A$, $b \in B$, $m \in M$. Ad esempio se N è un B-modulo e B è una A-algebra, allora N è un (A, B)-modulo.

    Mostrare che, se M è un A-modulo e L è un B-modulo, allora $M \otimes_A N$ è un B-modulo, $N \otimes_B L$ è un A-modulo e
$$(M \otimes_A N) \otimes_B L \cong M \otimes_A (N \otimes_B L).$$