

Università degli Studi Roma Tre  
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009  
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa  
Prof. S. Gabelli  
Esercizi 6 - Anelli di frazioni

Nel seguito  $A$  denota un anello commutativo unitario e  $S$  una sua parte moltiplicativa.

Se  $s \in A$  è un elemento non nilpotente e  $S = \{s^n, n \geq 0\}$ , si scrive  $A_S = A_s$ .

1. Sia  $X$  un sottoinsieme di  $A$  tale che  $1 \in X$  e sia

$$S := S(X) := \{s_1 \dots s_k; s_i \in X, k \geq 1\}.$$

Mostrare che  $S$  è una parte moltiplicativa di  $A$  (che si dice la parte moltiplicativa *generata* da  $X$ ).

Mostrare inoltre che se  $X$  è finito e non contiene zerodivisori, allora  $A_S = A_s$  per un opportuno  $s \in S$ .

2. Mostrare che l'omomorfismo naturale

$$A \longrightarrow A_S; \quad a \mapsto \frac{a}{1}$$

è un isomorfismo se e soltanto se  $S \subseteq \mathcal{U}(A)$ .

3. Sia  $A$  un dominio e sia  $S = A \setminus \{0\}$ . Mostrare che  $(A[X])_S = K[X]$ , dove  $K$  è il campo dei quozienti di  $A$ .
4. Sia  $K$  un campo. Mostrare che il campo dei quozienti dell'anello delle serie formali  $K[[X]]$  è l'anello delle *serie di Laurent*

$$K((X)) := \left\{ \sum_{i \geq s} a_i X^i; a_i \in K, s \in \mathbb{Z} \right\}.$$

5. Mostrare che  $A_s = A[\frac{1}{s}]$  e che  $A_s$  è isomorfo a  $\frac{A[X]}{(sX-1)}$ .  
*Suggerimento:* Considerare l'applicazione

$$A[X] \longrightarrow A_s; \quad f(X) \mapsto f\left(\frac{1}{s}\right).$$

6. Sia  $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Determinare la saturazione  $\overline{S}$  della parte moltiplicativa  $S = \{s^n\}_{n \geq 0}$  e verificare che  $\mathbb{Z}_s = \mathbb{Z}_{\overline{S}}$ .
7. Sia  $I$  un ideale di  $A$ . Mostrare che  $S = 1 + I = \{1 + a; a \in I\}$  è una parte moltiplicativa di  $A$  e determinare la saturazione di  $S$ .
8. Sia  $S = 1 + (X) \subseteq A[X]$ . Mostrare che l'applicazione

$$A[X]_S \longrightarrow A[[X]]; \quad \frac{f(X)}{g(X)} \mapsto f(X)g(X)^{-1}$$

è un (ben definito) omomorfismo iniettivo di anelli.

9. Sia  $K$  un campo e sia  $S = \{X^n\}_{n \geq 1}$  la parte moltiplicativa di  $K[X]$  generata da  $X$ . Verificare che gli anelli  $K[X]_S$  e  $K[X, X^{-1}]$  sono isomorfi.
10. Sia  $\phi : A \longrightarrow A_S, a \mapsto \frac{a}{1}$  l'omomorfismo naturale e sia  $T$  una parte moltiplicativa di  $A$ . Mostrare che  $ST = \{st, s \in S, t \in T\}$  è una parte moltiplicativa di  $A$  e che

$$A_{ST} \simeq (A_S)_{\phi(T)}.$$

Dedurre che, se  $P \subseteq Q$  sono due ideali primi di  $A$ , allora  $A_P = (A_Q)_{PA_Q}$ .

11. Sia  $I$  un ideale di  $A$  e sia  $T = \{s + I; s \in S\} \subseteq \frac{A}{I}$ . Mostrare che  $T$  è una parte moltiplicativa di  $\frac{A}{I}$  e che

$$\left(\frac{A}{I}\right)_T \simeq \frac{A_S}{I_S}.$$

Dedurre che, se  $P$  è un ideale primo, il campo residuo dell'anello locale  $A_P$  è isomorfo al campo dei quozienti del dominio  $\frac{A}{P}$ .

12. Siano  $M, N$  moduli su  $A$ . Mostrare che l'applicazione

$$M_S \otimes_{A_S} N_S \longrightarrow (M \otimes N)_S; \quad \frac{m}{s} \otimes \frac{n}{t} \mapsto \frac{m \otimes n}{st}$$

è un isomorfismo  $A_S$ -lineare.

*Suggerimento:* Notare che  $A_S$  è un  $(A, A_S)$ -modulo ed usare l'Esercizio 4-12.