Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli

Esercizi 8 - Estensione e contrazione di ideali

Nel seguito A e B sono anelli commutativi unitari non nulli e $f : A \longrightarrow B$ è un omomorfismo unitario. Se I è un ideale di A, indichiamo con I^e l'*estensione* di I in B, ovvero l'ideale di B generato da $f(I)$:

$$I^e = f(I)B = \left\{ \sum_{i=1}^{n} f(a_i)b_i ; a_i \in I, b_i \in B, n \geq 1 \right\}.$$

Se J è un ideale di B, indichiamo poi con J^c l'ideale *contrazione* di J su A, ovvero la *controimmagine* di J:

$$J^c = f^{-1}(J) := \{x \in A\, ;\ f(x) \in J\}.$$

Se $B = A_S$ e $f : A \longrightarrow A_S$, $a \rightarrow \frac{a}{1}$ è l'omomorfismo canonico, allora $I^e = I_S$. Se poi f è iniettivo, allora $I^e = IA_S$ è l'ideale di A_S generato da I.

1. Mostrare che:
   (a) $I \subseteq I^{ec}$; $J \supseteq J^{ce}$;
   (b) $I^e = I^{ece}$; $J^c = J^{cec}$.

2. Mostrare che se $Q \subseteq B$ è un ideale primo (P-primario), allora $Q^c \subseteq A$ è un ideale primo (P^c-primario).

3. Siano I_1, I_2 ideali di A e J_1, J_2 ideali di B. Verificare che:
   (a) $(I_1 + I_2)^e = I_1^e + I_2^e$; $(J_1 + J_2)^c \supseteq J_1^c + J_2^c$;
   (b) $(I_1 \cap I_2)^e \subseteq I_1^e \cap I_2^e$; $(J_1 \cap J_2)^c = J_1^c \cap J_2^c$;
   (c) $(I_1 I_2)^e = I_1^e {I_2}^e$; $(J_1 J_2)^c \supseteq J_1^c J_2^c$;
   (d) $(I_1 :_A I_2)^e \subseteq (I_1^e :_B I_2^e)$; $(J_1 :_B J_2)^c \subseteq (J_1^c :_A J_2^c)$;
   (e) $\sqrt{I^e} \supseteq (\sqrt{I})^e$; $(\sqrt{J})^c = \sqrt{J^c}$.

4. Sia A un dominio integro con campo dei quozienti K. Mostrare che

$$I_S = \{x \in K\,;\, xs \in I \text{ per qualche } s \in S\} := \bigcup_{s \in S} (I :_K sA).$$

5. Siano I, H ideali di A. Mostrare che

   (a) $(I \cap H)_S = I_S \cap H_S$;

   (b) Se H è finitamente generato, allora $(I :_A H)_S = (I_S :_{A_S} H_S)$.

6. Supponiamo che f sia suriettivo. Mostrare che:

   (a) $I^e = f(I)$; dunque $f(I)$ è un ideale di B.

   (b) Se $I \supseteq Ker(f)$, allora l'applicazione:

   $$\frac{A}{I} \longrightarrow \frac{B}{f(I)} \quad \text{definita da} \quad a + I \to f(a) + f(I)$$

   è ben posta ed è un isomorfismo.

   (c) Se J è un ideale di B, allora l'applicazione:

   $$\frac{A}{J^c} \longrightarrow \frac{B}{J} \quad \text{definita da} \quad a + J^c \to f(a) + J$$

   è ben posta ed è un isomorfismo.

7. Sia A un dominio di integrità con campo dei quozienti K e sia B un sopra anello di A (cioè $A \subseteq B \subseteq K$). Mostrare che se $P \in \mathrm{Spec}(B)$ allora $A_{P \cap A} \subseteq B_P$.

8. Sia $\varphi : (A, M) \longrightarrow (B, N)$ un omomorfismo di anelli locali, tale che $\varphi(M) \subseteq N$. Mostrare che l'applicazione

   $$A/M \longrightarrow B/N\,; \quad a + M \mapsto \varphi(a) + N$$

   è un ben definito omomorfismo (iniettivo) di campi.