

Lo Spettro primo di un anello

Carmelo Antonio Finocchiaro

Indice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Lo spettro primo di un anello: introduzione | 5 |
| 1.1 | Le regole del gioco | 5 |
| 1.2 | Prime definizioni e risultati iniziali | 5 |
| 1.3 | Proprietà funtoriali di $\text{Spec}(A)$ | 7 |
| 2 | Proprietà topologiche di $\text{Spec}(A)$ | 11 |
| 2.1 | Compattezza | 11 |
| 2.1.1 | Anelli di frazioni | 12 |
| 2.2 | Chiusura e proprietà di separazione | 16 |
| 2.3 | Irriducibilità | 18 |
| 2.4 | Connessione | 20 |
| 2.5 | Anelli booleani | 21 |
| 3 | Spazi Noetheriani | 25 |
| 3.1 | Proprietà topologiche generali | 25 |
| 3.2 | Lo spettro primo di un anello Noetheriano | 28 |
| 3.3 | Anelli con spettro Noetheriano: come si caratterizzano? | 29 |

Capitolo 1

Lo spettro primo di un anello: introduzione

1.1 Le regole del gioco

Nel corso di queste note, con il termine anello si intenderà sempre un anello commutativo con unità.

Ogni omomorfismo di anelli $f : A \rightarrow B$ manderà l'unità di A nell'unità di B .

Inoltre ideali primi si intenderanno sempre propri. Ricordiamo che, per il Lemma di Zorn, ogni anello non nullo possiede ideali massimali. Ogni ideale massimale è primo.

1.2 Prime definizioni e risultati iniziali

1.1 Definizione. Siano A un anello e \mathfrak{a} un ideale di A . L'insieme

$$\text{rad}(\mathfrak{a}) = \{x \in A : x^n \in \mathfrak{a} \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}\}$$

si dirà *radicale dell'ideale* \mathfrak{a} .

Si dimostra facilmente che $\text{rad}(\mathfrak{a})$ è un ideale di A .

Sia A un anello. Diremo *spettro primo di A* l'insieme degli ideali primi di A , che denoteremo con $\text{Spec}(A)$. Se $E \subseteq A$, poniamo $V(E) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) : \mathfrak{p} \supseteq E\}$. Quanto segue mosterà che gli insiemi della forma $V(E)$ sono i chiusi di una topologia sull'insieme $\text{Spec}(A)$.

1.2 Lemma. Siano A un anello e $X := \text{Spec}(A)$. Allora valgono le seguenti proprietà.

(1) $V(0) = X$ e $V(A) = \emptyset$.

(2) Se \mathfrak{J} è l'ideale generato da $E \subseteq A$, allora

$$V(E) = V(\mathfrak{J}) = V(\text{rad}(\mathfrak{J})).$$

(3) Se $\{E_r\}_{r \in R}$ è una famiglia arbitraria di sottoinsiemi di A , allora

$$V\left(\bigcup_{r \in R} E_r\right) = \bigcap_{r \in R} V(E_r).$$

(4) Se $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sono ideali arbitrari di A allora,

$$V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}).$$

Dunque la famiglia \mathcal{C} soddisfa tutti gli assiomi per i chiusi di uno spazio topologico: infatti X e \emptyset sono chiusi, l'intersezione di una famiglia arbitraria di chiusi è un chiuso, l'unione finita di chiusi è un chiuso. La topologia che resta definita su X prende il nome di Topologia di Zariski.

DIMOSTRAZIONE. Si tratta di immediate verifiche insiemistiche. Proviamo per esempio la (2) e la (4). Se \mathfrak{J} è l'ideale generato da E allora, denotata con \mathcal{F} la famiglia degli ideali di A contenenti E , deve aversi

$$\mathfrak{J} = \bigcap_{\mathfrak{j} \in \mathcal{F}} \mathfrak{j}.$$

Se \mathfrak{p} è un ideale primo appartenente a $V(E)$, allora $\mathfrak{p} \supseteq E$ e quindi $\mathfrak{p} \in \mathcal{F}$, da cui segue subito $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{J})$. Viceversa, se $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{J})$, allora

$$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{J} = \bigcap_{\mathfrak{j} \in \mathcal{F}} \mathfrak{j} \supseteq E,$$

e quindi $\mathfrak{p} \in V(E)$. Siccome $\mathfrak{a} \subseteq \text{rad}(\mathfrak{a})$, si ha $V(\mathfrak{a}) \supseteq V(\text{rad}(\mathfrak{a}))$. Viceversa, sia $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ e sia $x \in \text{rad}(\mathfrak{a})$. Allora $x^n \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, per qualche $n \in \mathbb{N}$. Segue $x \in \mathfrak{p}$ e quindi $\mathfrak{p} \in V(\text{rad}(\mathfrak{a}))$. Dimostriamo adesso che $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, con $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ideali di A . Da $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ segue subito $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$. Viceversa, sia \mathfrak{p} un elemento di $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, ovvero $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Fissato $x \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, segue subito che x^2 è elemento di $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ e quindi di \mathfrak{p} . Allora $x \in \mathfrak{p}$, perché \mathfrak{p} è un ideale primo. Resta così provato che $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, da cui segue subito l'uguaglianza insiemistica cercata. Resta da provare che $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$. Detto \mathfrak{p} un ideale primo, se \mathfrak{p} contiene almeno uno dei due ideali considerati, allora conterrà anche la loro intersezione e quindi $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$. Viceversa, si deve provare che

$$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \implies \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \text{ oppure } \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}.$$

Supponiamo per assurdo che esistano $a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}$ tali che $a, b \notin \mathfrak{p}$. Poiché è evidente che $ab \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, per ipotesi deve aversi $ab \in \mathfrak{p}$, e quindi si ottiene che \mathfrak{p} non è un ideale primo. \square

1.3 Esempio. Se K è un campo, allora è subito visto che i suoi unici ideali sono quelli banali. Dunque $\text{Spec}(K)$ è costituito dal singoletto $\{(0)\}$.

1.4 Esempio. Poiché gli ideali primi non nulli dell'anello \mathbb{Z} sono tutti e soli gli ideali del tipo (p) , con p numero primo, allora

$$\text{Spec}(\mathbb{Z}) = \{(0), (p) : p \text{ numero primo}\}.$$

Siccome gli ideali della forma (p) , con p primo, sono evidentemente massimali, si ha $V(p) = \{(p)\}$. Più in generale, se $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, allora

$$V(n) = \{(p) : p \text{ divide } n\}.$$

Inoltre l'unico chiuso di $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ contenente l'ideale nullo è lo stesso $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Dunque l'insieme $\{(0)\}$ è denso in $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Dunque ogni sottoinsieme di $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ contenente (0) è denso. In particolare, un sottoinsieme finito di $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ è chiuso se e soltanto se non contiene (0) .

Per ogni elemento $a \in A$, denotiamo con X_a l'insieme $X \setminus V(a)$, essendo $X = \text{Spec}(A)$. Per definizione X_a è un aperto (in quanto complementare di un chiuso). Ci risulterà molto utile il seguente

1.5 Lemma. *Gli insiemi X_a , con $a \in A$, costituiscono una base di aperti per la topologia di Zarisky. In particolare, se \mathfrak{a} è un ideale di A , si ha $X \setminus V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} X_f$.*

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente da (1.2). □

1.6 Definizione. *Gli elementi della base $\{X_a : a \in A\}$ si diranno aperti principali.*

1.3 Proprietà functoriali di $\text{Spec}(A)$

Se fino ad ora abbiamo introdotto le principali caratteristiche di struttura dello spettro primo di un fissato anello, adesso intendiamo stabilire eventuali legami fra gli spettri di due anelli sui quali agisce un omomorfismo.

1.7 Lemma. *Sia $f : A \rightarrow B$ un omomorfismo di anelli e sia \mathfrak{q} un ideale primo di B . Allora $f^{-1}(\mathfrak{q})$ è un ideale primo di A .*

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione $f_1 : A \rightarrow B/\mathfrak{q}$ definita ponendo $f_1(a) = f(a) + \mathfrak{q}$, per ogni $a \in A$, è un omomorfismo di anelli il cui nucleo è $f^{-1}(\mathfrak{q})$. Allora f_1 induce un isomorfismo fra $A/f^{-1}(\mathfrak{q})$ e un sottoanello del dominio B/\mathfrak{q} . Quindi $A/f^{-1}(\mathfrak{q})$ è a fortiori un dominio, che è quanto si voleva provare. □

Dalla definizione di omeomorfismo di spazi topologici segue subito il seguente

1.8 Lemma. *Se $f : X \rightarrow Y$ è una funzione continua e biunivoca fra spazi topologici, allora f è un omeomorfismo se e soltanto se f è aperta.*

Richiamiamo inoltre un importante risultato di Algebra.

1.9 Teorema. *Se $f : A \rightarrow B$ è un omomorfismo surgettivo di anelli, allora esiste una corrispondenza biunivoca φ fra l'insieme degli ideali di B e l'insieme degli ideali di A contenenti $\ker(f)$. Tale corrispondenza è definita ponendo $\varphi(\mathfrak{q}) = f^{-1}(\mathfrak{q})$ per ogni ideale \mathfrak{q} di B e inoltre φ conserva l'inclusione.*

Consideriamo adesso un omomorfismo di anelli $f : A \rightarrow B$. Alla luce di (1.7) l'omomorfismo f induce un'applicazione $f^* : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ definita ponendo $f^*(\mathfrak{q}) = f^{-1}(\mathfrak{q})$ per ogni ideale primo \mathfrak{q} di B .

1.10 Proposizione. *$f^* : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ è una funzione continua tale che*

$$f^{*-1}(X_a) = Y_{f(a)} \quad \forall a \in A \text{ con } X = \text{Spec}(A), Y = \text{Spec}(B).$$

DIMOSTRAZIONE. In virtù di (1.5) basta dimostrare l'uguaglianza $f^{*-1}(X_a) = Y_{f(a)}$. Fissiamo un ideale primo $\mathfrak{q} \in Y$. Allora $\mathfrak{q} \in f^{*-1}(X_a) \Leftrightarrow f^*(\mathfrak{q}) = f^{-1}(\mathfrak{q}) \in X \setminus V(a) \Leftrightarrow a \notin f^{-1}(\mathfrak{q}) \Leftrightarrow f(a) \notin \mathfrak{q} \Leftrightarrow \mathfrak{q} \in Y_{f(a)}$. Questo conclude la dimostrazione. \square

La principale proprietà della funzione f^* è data dal seguente

1.11 Teorema. *Se $f : A \rightarrow B$ è un omomorfismo surgettivo di anelli e Y lo spettro primo dell'anello B allora la funzione $f^* : Y \rightarrow V(\ker(f))$ è un omeomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Comunque si assegni un ideale primo \mathfrak{q} di B , da $f^*(\mathfrak{q}) = f^{-1}(\mathfrak{q}) \supseteq f^{-1}(0) = \ker(f)$ segue $f^*(\mathfrak{q}) \in V(\ker(f))$, dunque l'applicazione f^* è ben definita. Da (1.9) e (1.7) segue facilmente che gli ideali primi di B sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali primi di A contenenti $\ker(f)$ e quindi, alla luce di (1.10), f^* è una funzione biunivoca e continua. Inoltre, dal fatto che f è surgettivo segue facilmente, per (1.9), che $f^*(V(\mathfrak{a})) = V(f^{-1}(\mathfrak{a}))$, per ogni ideale \mathfrak{a} di A , e quindi f^* è un'applicazione chiusa. Questo basta per concludere la dimostrazione. \square

1.12 Corollario. *Se A è un anello e \mathfrak{J} un ideale di A , allora $\text{Spec}(A/\mathfrak{J})$ è omeomorfo al sottospazio $V(\mathfrak{J})$ di $\text{Spec}(A)$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\pi : A \rightarrow A/\mathfrak{J}$ è la proiezione canonica di A in A/\mathfrak{J} , osservato che π è un omomorfismo surgettivo di anelli tale che $\ker(\pi) = \mathfrak{J}$, dall'applicazione di (1.11) segue l'asserto. \square

1.13 Definizione. *Se A è un anello, diremo che $x \in A$ è un elemento nilpotente se esiste un intero $n > 0$ tale che $x^n = 0$. L'insieme degli elementi nilpotenti di un anello A si dirà nilradicale e si denoterà con $\text{Nilp}(A)$.*

Dal fatto che $\text{Nilp}(A) = \text{rad}((0))$, segue che $\text{Nilp}(A)$ è un ideale di A . Ricordiamo il seguente fatto, di cui in seguito daremo una dimostrazione.

1.14 Proposizione. *Sia A un anello. Allora $\text{Nilp}(A)$ è l'intersezione di tutti gli ideali primi di A .*

1.15 Proposizione. *Siano A un anello e \mathfrak{a} un ideale di A . Allora $\text{rad}(\mathfrak{a})$ è l'intersezione di tutti gli ideali primi di A contenenti \mathfrak{a} .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\pi : A \rightarrow A/\mathfrak{a}$ la proiezione canonica. Si ha, ovviamente $\text{rad}(\mathfrak{a}) = \pi^{-1}(\text{Nilp}(A/\mathfrak{a}))$. Inoltre, tenendo presente (1.14) e (1.12), si ha $\pi^{-1}(\text{Nilp}(A/\mathfrak{a})) = \bigcap \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})\}$, che è quanto si voleva dimostrare. \square

1.16 Corollario. *Se A un anello, allora $\text{Spec}(A)$ e $\text{Spec}(A/\text{Nilp}(A))$ sono spazi topologici omeomorfi.*

DIMOSTRAZIONE. In virtù di (1.12), $\text{Spec}(A/\text{Nilp}(A))$ e $V(\text{Nilp}(A))$ sono spazi topologici omeomorfi. Infine, da (1.14) segue che $V(\text{Nilp}(A)) = \text{Spec}(A)$. \square

1.17 Esempio. Vogliamo studiare la struttura topologica di $\text{Spec}(\mathbb{Z}_n)$, essendo n un intero positivo. Poiché $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n)$, dall'applicazione di (1.12) segue subito che $\text{Spec}(\mathbb{Z}_n)$ è omeomorfo al sottospazio $V(n)$ di $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Essendo

$$V(n) = \{(p) \in \text{Spec}(\mathbb{Z}) : p|n\},$$

allora la cardinalità di $\text{Spec}(\mathbb{Z}_n)$ coincide con il numero di divisori primi di n .

1.18 Esempio. Se a è un intero relativo, sia \mathfrak{J}_a l'insieme di polinomi $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tali che $g(a) = 0$. \mathfrak{J}_a è un ideale di $\mathbb{Z}[x]$ perché, detto $f_a : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}$ l'omomorfismo di anelli definito ponendo $f_a(g(x)) = g(a)$, risulta $\ker(f_a) = \mathfrak{J}_a$. Poiché si osserva immediatamente che f_a è surgettivo, da (1.11) segue che il sottospazio $V(\mathfrak{J}_a)$ di $\text{Spec}(\mathbb{Z}[x])$ è omeomorfo a $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Da questo esempio si evince quanto possa essere utile (1.11), perché consente di studiare spazi topologici di struttura apparentemente non banale mediante omeomorfismi con spazi topologici "standard" come $\text{Spec}(\mathbb{Z})$.

Capitolo 2

Proprietà topologiche di $\text{Spec}(A)$

Intendiamo adesso entrare nello specifico riguardo alle peculiarità topologiche di $\text{Spec}(A)$. Useremo spesso il seguente risultato.

2.1 Proposizione. *Se A è un anello e $\mathfrak{J} \neq A$ è un suo ideale, allora esiste un ideale massimale \mathfrak{M} tale che $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{M}$.*

DIMOSTRAZIONE. L'anello non nullo A/\mathfrak{J} ammette un ideale massimale \mathfrak{M}^* . Allora $\pi^{-1}(\mathfrak{M}^*)$ è un ideale massimale di A contenente \mathfrak{J} , in quanto la mappa π^* , per (1.12), stabilisce un omeomorfismo fra $\text{Spec}(A/\mathfrak{J})$ e $V(\mathfrak{J})$, e, stante (1.9), preserva le inclusioni. \square

2.2 Proposizione. *Sia A un anello, $a, b \in A$ e $X = \text{Spec}(A)$. Allora*

- (1) $X_a \cap X_b = X_{ab}$.
- (2) $X_a = \emptyset \iff a$ è nilpotente.
- (3) $X_a = X \iff a$ è invertibile.

DIMOSTRAZIONE. (1) si ottiene osservando che $V(a) \cup V(b) = V(ab)$. (2): $X_a = \emptyset \iff V(a) = X \iff$ tutti gli ideali primi di A contengono $a \iff a \in \text{Nilp}(A)$. (3) Se $X_a = X$ allora $V(a) = V((a)) = \emptyset$. Se fosse $(a) \subset A$, allora, per (2.1), esisterebbe un ideale massimale \mathfrak{M} che lo contiene: poiché \mathfrak{M} è anche un ideale primo, allora $\mathfrak{M} \in V(a)$, e questo è assurdo. Allora $(a) = A$ e quindi a è invertibile. Il viceversa è banale. \square

2.1 Compattezza

Il seguente fatto segue facilmente dalle definizioni, e la sua dimostrazione viene lasciata al lettore.

2.3 Lemma. *Siano X uno spazio topologico e \mathcal{B} una base per la topologia di X . Se ogni ricoprimento di X costituito da elementi di \mathcal{B} ha un sottoricoprimento finito, allora X è compatto.*

2.4 Proposizione. *Se A è un anello allora $X = \text{Spec}(A)$ è uno spazio topologico compatto.*

DIMOSTRAZIONE. In virtù di (2.3), basterà provare che, se $\mathcal{A} := \{X_{a_r} : r \in R\}$ è un ricoprimento di X , allora anche qualche sottofamiglia finita di \mathcal{A} ricopre X . Sia \mathfrak{J} l'ideale generato da tutti gli elementi a_r . Se risultasse $\mathfrak{J} \subset A$, allora, per (2.1), \mathfrak{J} sarebbe contenuto in un ideale massimale \mathfrak{M} , e perché ciò avvenga deve risultare $a_r \in \mathfrak{M}$ per ogni $r \in R$, ovvero

$$\mathfrak{M} \in \bigcap_{r \in R} V(a_r).$$

D'altra parte, poiché \mathcal{A} ricopre X , deve aversi

$$\emptyset = X \setminus \bigcup_{r \in R} X_{a_r} = \bigcap_{r \in R} V(a_r),$$

e così si perviene a una contraddizione. Allora deve aversi $\mathfrak{J} = A$ e, dovendo essere $1 \in \mathfrak{J}$, esiste un sottoinsieme finito $H \subseteq R$ tale che

$$1 = \sum_{h \in H} b_h a_h, \text{ essendo } b_h \in A \quad \forall h \in H.$$

Vogliamo provare che $\{X_{a_h} : h \in H\}$ è un ricoprimento (finito) di X . Supponiamo, per assurdo, che sia

$$\bigcup_{h \in H} X_{a_h} \subset X, \text{ e quindi } \bigcap_{h \in H} V(a_h) \neq \emptyset.$$

Pertanto esiste un ideale primo \mathfrak{p} tale che $a_h \in \mathfrak{p}$ per ogni $h \in H$. Segue subito

$$1 = \sum_{h \in H} b_h a_h \in \mathfrak{p},$$

cioè $\mathfrak{p} = A$, assurdo perché \mathfrak{p} è un ideale primo. □

2.1.1 Anelli di frazioni

Come è ben noto, ogni dominio di integrità si può immergere un campo, detto campo dei quozienti. Adesso mostreremo come il passaggio alle frazioni sia possibile anche in generale. Dovremo aspettarci tuttavia che l'anello contenente le frazioni possa non essere un campo.

2.5 Definizione. *Sia A un anello e S un suo sottoinsieme. Diremo che S è una parte moltiplicativa di A se verifica le due seguenti condizioni*

1. $1 \in S$;
2. se $x, y \in S$ allora $xy \in S$.

Definiamo su $A \times S$ una relazione binaria \sim ponendo

$$(a, s) \sim (b, t) \stackrel{def}{\iff} \text{esiste } u \in S \text{ tale che } (at - bs)u = 0.$$

Risulta facile verificare che \sim costituisce una relazione di equivalenza; allora nasce l'insieme delle classi che denotiamo con $S^{-1}A$: in particolare, per ogni coppia (a, s) indichiamo con a/s la classe cui (a, s) appartiene. Assegnate, mediante le stesse definizioni usate per costruire \mathbb{Q} da \mathbb{Z} , le operazioni di somma e prodotto, si rende $S^{-1}A$ un anello commutativo unitario, che viene chiamato anello delle frazioni di A rispetto a S . Fissata una parte moltiplicativa S di A e l'anello delle frazioni ad essa associato, resta definito in modo naturale un omomorfismo $h : A \rightarrow S^{-1}A$, ponendo $h(x) = x/1$. Si noti che h non è necessariamente iniettivo, come a breve mostreremo.

2.6 Esempio. Detto A un anello e f un elemento di A si osserva immediatamente che l'insieme $S = \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ è una parte moltiplicativa di A : il corrispondente anello delle frazioni si denota con A_f . Se f è un divisore dello zero, allora l'omomorfismo naturale $h : A \rightarrow A_f$ non è iniettivo. Infatti, detto x un elemento non nullo di A tale che $xf = 0$, si ha $h(x) = 0$.

2.7 Esempio. Se A è un anello e \mathfrak{p} è un ideale primo di A , allora $A \setminus \mathfrak{p}$ è una parte moltiplicativa. L'anello delle frazioni ad essa associato si indica con $A_{\mathfrak{p}}$, e si dice localizzazione di A in \mathfrak{p} . La scelta del nome dipende dal fatto che $A_{\mathfrak{p}}$ è un anello locale, come facilmente si verifica.

Per risolvere alcune questioni di compattezza ci sarà utile il seguente

2.8 Teorema. *Se S è una parte moltiplicativa di un anello A , allora $\text{Spec}(S^{-1}A)$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme degli ideali primi di A che non incontrano S . Tale corrispondenza biunivoca associa a ogni ideale primo \mathfrak{q} di $S^{-1}A$ l'ideale primo $h^{-1}(\mathfrak{q})$ di A , essendo h l'omomorfismo naturale di A in $S^{-1}A$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia Δ l'insieme degli ideali primi di A che non incontrano S , siano $l : \Delta \rightarrow \text{Spec}(S^{-1}A)$ ed $m : \text{Spec}(S^{-1}A) \rightarrow \Delta$ le funzioni definite ponendo $l(\mathfrak{p}) = S^{-1}\mathfrak{p}$, $m(\mathfrak{q}) = h^{-1}(\mathfrak{q})$. Sarà sufficiente far vedere che sono una inversa dell'altra. Proviamo intanto che sono ben definite: è immediato osservare che $S^{-1}\mathfrak{p}$ è un ideale primo di $S^{-1}A$ (e quindi l è ben definita). Poiché, stante (1.7), $h^{-1}(\mathfrak{q})$ è un ideale primo di A , per verificare che $h^{-1}(\mathfrak{q}) \in \Delta$ basterà provare che $h^{-1}(\mathfrak{q})$ non incontra S . Se per assurdo esistesse $s \in S$ tale che $s \in h^{-1}(\mathfrak{q})$ allora si avrebbe $h(s) = s/1 \in \mathfrak{q}$, e poiché $s/1$ è un invertibile di $S^{-1}A$, \mathfrak{q} coinciderebbe con tutto l'anello delle frazioni, assurdo perché \mathfrak{q} è un ideale primo. Con usuali verifiche si prova che $m \circ l$ e che $l \circ m$ sono l'identità su Δ e su $\text{Spec}(S^{-1}A)$, rispettivamente. Dimostriamo per esempio la prima uguaglianza, cioè che $h^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$: l'inclusione $\mathfrak{p} \subseteq h^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p})$ è ovvia; viceversa sia $x \in h^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p})$, cioè $x/1 \in S^{-1}\mathfrak{p}$; allora esistono $p \in \mathfrak{p}, s \in S$ tali che $x/1 = p/s$, o in altri termini $(x, 1) \sim (p, s)$, e pertanto $\sigma(sx - p) = 0$ per qualche $\sigma \in S$. Segue subito $\sigma sx = \sigma p \in \mathfrak{p}$. Ma poiché $\mathfrak{p} \in \Delta$ e quindi non

incontra S allora $s\sigma \in S \Rightarrow s\sigma \in \mathfrak{p}$: allora, dal fatto che \mathfrak{p} è un ideale primo segue subito $x \in \mathfrak{p}$, da cui l'asserto. \square

Con il teorema appena provato possiamo dedurre molto facilmente che il nilradicale di un anello coincide con l'intersezione di tutti i suoi ideali primi (1.14). Si osservi che la dimostrazione dipende solamente da (2.8).

L'inclusione $\text{Nilp}(A) \subseteq \bigcap \mathfrak{p}$ è ovvia. Viceversa sarà sufficiente provare che se f è un elemento non nilpotente allora esiste un ideale primo a cui f non appartenga. Considerato l'anello delle frazioni A_f , si osserva subito che $A_f \neq (0)$, essendo f non nilpotente. Allora tale anello ammette un ideale \mathfrak{M} massimale (e quindi primo): dunque, stante (2.8), $h^{-1}(\mathfrak{M})$ è un ideale primo di A che non incontra $S = \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$, cioè $f \notin h^{-1}(\mathfrak{M})$, da cui l'asserto. \square

Un altro risultato che si dimostra mediante (2.8) è il seguente

2.9 Teorema. *Siano A un anello, S una sua parte moltiplicativa, h l'omomorfismo naturale di A in $S^{-1}A$. Allora, se Δ è il sottospazio di $\text{Spec}(A)$ costituito dagli ideali primi di A che non incontrano S , la funzione $h^* : \text{Spec}(S^{-1}A) \rightarrow \Delta$ è un omeomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Per (1.10), h^* è una funzione continua e, poiché essa è definita ponendo $h^*(\mathfrak{q}) = h^{-1}(\mathfrak{q})$, è una funzione biunivoca, stante (2.8). Allora, per (1.8), per dimostrare che h^* è un omeomorfismo, sarà sufficiente provare che h^* è aperta, come applicazione da $\text{Spec}(S^{-1}A)$ in Δ . Denotati con X e Y rispettivamente $\text{Spec}(A)$ e $\text{Spec}(S^{-1}A)$, sia Ω un aperto di Y : per (1.5), esso è unione di aperti principali, cioè

$$Y = \bigcup_{r \in R} Y_{a_r/s_r}, \text{ con } a_r \in A, s_r \in \Sigma \quad \forall r \in R.$$

Fissato $r \in R$ e osservato che $1/s_r$ è invertibile in $S^{-1}A$, per (2.2) deve ottenersi $Y_{a_r/s_r} = Y_{a_r/1}$. Allora, ricordando (2.2) e (1.10), si ha:

$$\Omega = \bigcup_{r \in R} Y_{1/s_r h(a_r)} = \bigcup_{r \in R} [Y_{1/s_r} \cap Y_{h(a_r)}] = \bigcup_{r \in R} Y_{h(a_r)} = \bigcup_{r \in R} h^{*-1}(X_{a_r}),$$

e quindi

$$h^*(\Omega) = \bigcup_{r \in R} X_{a_r} \cap \Delta,$$

essendo $h^*(h^{*-1}(X_a)) = \Delta \cap X_a$, per ogni $a \in A$. Questo conclude la dimostrazione. \square

2.10 Corollario. *Sia X lo spettro primo di un anello A . Allora, per ogni $f \in A$, il sottospazio X_f di $\text{Spec}(A)$ è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Considerata la parte moltiplicativa $S = \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$, stante (2.9), l'anello di frazioni A_f è tale che $\text{Spec}(A_f)$, compatto per (2.4), è omeomorfo al sottospazio Δ di $\text{Spec}(A)$ costituito dagli ideali primi di A che non incontrano S , cioè dagli ideali primi

che non contengono f : allora $\Delta = X \setminus V(f) = X_f$. \square

Dalla definizione di compattezza per un sottospazio di uno spazio topologico segue immediatamente la seguente utile

2.11 Proposizione. *Se X è uno spazio topologico e Y è un suo sottospazio, Y è compatto se e soltanto se, per ogni famiglia $\{A_r : r \in R\}$ di aperti in X tale che*

$$Y \subseteq \bigcup_{r \in R} A_r,$$

esiste un sottoinsieme finito S di R tale che

$$Y \subseteq \bigcup_{r \in S} A_r.$$

2.12 Proposizione. *Se X è uno spazio topologico, allora l'unione di un numero finito di sottospazi compatti di X è ancora un sottospazio compatto di X .*

DIMOSTRAZIONE. Sarà sufficiente far vedere che, se Y, Z sono sottospazi compatti di X , allora tale risulta anche $Y \cup Z$. Sia $\{A_r : r \in R\}$ un ricoprimento di $Y \cup Z$ mediante aperti di X . Evidentemente risulta

$$Y, Z \subseteq Y \cup Z \subseteq \bigcup_{r \in R} A_r;$$

pertanto, per la compattezza di Y, Z e per (2.11), esistono due sottoinsiemi finiti S, T di R tali che

$$Y \subseteq \bigcup_{r \in S} A_r, \quad Z \subseteq \bigcup_{r \in T} A_r$$

e quindi

$$Y \cup Z \subseteq \bigcup_{r \in S \cup T} A_r,$$

e, ancora per (2.11), $Y \cup Z$ è compatto. \square

2.13 Proposizione. *Detto X lo spettro primo di un anello A , allora un aperto di X è compatto se e soltanto se esso è unione finita di aperti principali.*

DIMOSTRAZIONE. Sia Ω un aperto di X . Se Ω è compatto sia \mathcal{F} un ricoprimento di Ω mediante aperti di X , ciascuno dei quali, per (1.5), è unione di aperti principali. Allora \mathcal{F} ammette un sottoricoprimento finito, per la compattezza di Ω .

Viceversa, se

$$\Omega = \bigcup_{h=1}^h X_{f_h}$$

la compattezza di Ω segue subito dall'applicazione di (2.10) e (2.12). \square

2.2 Chiusura e proprietà di separazione

2.14 Proposizione. *Siano A un anello. Se Y è un sottoinsieme di $\text{Spec}(A)$, allora la sua chiusura \overline{Y} in $\text{Spec}(A)$ è l'insieme $V(\bigcap\{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in Y\})$*

DIMOSTRAZIONE. Ovviamente $V(\bigcap\{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in Y\})$ è un insieme chiuso di $\text{Spec}(A)$ contenente Y . Sia adesso F un chiuso di $\text{Spec}(A)$ contenente Y . Dunque si ha $F = V(\mathfrak{a})$, per qualche ideale \mathfrak{a} di A . Poiché $F \supseteq Y$, si ha subito $\mathfrak{a} \subseteq \bigcap\{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in Y\}$. Quindi $F = V(\mathfrak{a}) \supseteq V(\bigcap\{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in Y\})$. Questo completa la dimostrazione. \square

2.15 Corollario. *Siano X lo spettro primo di un anello A e $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in X$.*

- (1) *Il singoletto $\{\mathfrak{p}\} \subseteq X$ è chiuso $\iff \mathfrak{p}$ è massimale.*
- (2) *La chiusura $\overline{\{\mathfrak{p}\}}$ in X del singoletto $\{\mathfrak{p}\}$ coincide con $V(\mathfrak{p})$.*

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente da (2.14). \square

2.16 Esempio. Abbiamo precedentemente osservato che $\text{Spec}(\mathbb{Z}_n)$ è uno spazio topologico finito. Inoltre si osserva immediatamente che ogni ideale primo è massimale. Pertanto per (2.15) tutti i singoletti di $\text{Spec}(\mathbb{Z}_n)$ sono chiusi. Ciò è sufficiente per affermare che la topologia su $\text{Spec}(\mathbb{Z}_n)$ è quella discreta.

2.17 Definizione. *Se X è uno spazio topologico, diremo che X è T_0 se per ogni coppia di punti distinti esiste un aperto che contiene soltanto uno dei due punti.*

2.18 Definizione. *Se X è uno spazio topologico, diremo che X è T_1 se per ogni coppia di punti x, y distinti esiste un aperto A_x tale che $x \in A_x$ e $y \notin A_x$, ed esiste un aperto A_y tale che $y \in A_y$ e $x \notin A_y$.*

2.19 Definizione. *Se X uno spazio topologico, diremo che X è T_2 , oppure che X è uno spazio di Hausdorff, se comunque si assegnino due elementi $x, y \in X$ distinti esistono due aperti A_x, A_y disgiunti tali che $x \in A_x, y \in A_y$.*

Ricordiamo la seguente caratterizzazione degli spazi T_1 , di cui riportiamo la dimostrazione, per comodità del lettore.

2.20 Proposizione. *Uno spazio topologico X soddisfa l'assioma T_1 se e soltanto se $\{x\}$ è chiuso, per ogni $x \in X$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\{x\}$ sia chiuso, per ogni $x \in X$. Fissiamo due punti distinti x, y di X . Allora, per ipotesi, gli insiemi $X \setminus \{y\}, X \setminus \{x\}$ sono aperti, e sono gli interni di x, y cercati, rispettivamente. Viceversa, supponiamo che X sia T_1 , e fissiamo un punto $x \in X$. Allora, per ogni $y \in X \setminus \{x\}$, esiste, in particolare, un intorno A_y di y tale che $x \notin A_y$. Allora segue immediatamente che

$$\{x\} = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} A_y,$$

e pertanto $\{x\}$ è chiuso. \square

2.21 Proposizione. *Lo spettro primo X di un anello A è uno spazio topologico T_0 .*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in X$ due ideali primi distinti: possiamo supporre, per fissare le idee, che esista $a \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}$, e quindi X_a è un aperto contenente \mathfrak{q} tale che $\mathfrak{p} \notin X_a$. \square

2.22 Proposizione. *Sia A un anello e X il suo spettro primo. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.*

- (1) X è uno spazio topologico T_1
- (2) Ogni ideale primo di A è un ideale massimale.

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente da (2.15) e da (2.20). \square

2.23 Definizione. *Se A è un anello e \mathfrak{p} è un ideale di A , diremo che \mathfrak{p} è un primo minimale se è un elemento minimale di $\text{Spec}(A)$, ovvero se \mathfrak{p} è un ideale primo e se non esiste un ideale primo \mathfrak{q} di A distinto da \mathfrak{p} e contenuto in \mathfrak{p} .*

2.24 Osservazione. Ogni anello non nullo ha ideali primi minimali. Infatti, nell'insieme non vuoto $\text{Spec}(A)$, ordinato parzialmente da \supseteq , ogni catena \mathcal{C} ha un maggiorante, dato dall'intersezione dei membri di \mathcal{C} (che è un ideale primo, come facilmente si verifica). Dunque il Lemma di Zorn garantisce che $(\text{Spec}(A), \supseteq)$ ha elementi massimali, ovvero che A ha primi minimali.

Il seguente risultato caratterizza i primi minimali di un anello.

2.25 Proposizione. *Se A è un anello e \mathfrak{p} è un ideale primo di A , allora le seguenti condizioni sono equivalenti.*

- (1) \mathfrak{p} è un primo minimale.
- (2) Per ogni $x \in \mathfrak{p}$, esiste $a \in A \setminus \mathfrak{p}$ tale che ax è nilpotente.

DIMOSTRAZIONE. (2) implica (1). Per assurdo, assumiamo che \mathfrak{p} non sia un primo minimale, e fissiamo un ideale primo \mathfrak{q} di A contenuto strettamente in \mathfrak{p} . Dunque, possiamo scegliere un elemento $x \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}$. In virtù della condizione (2), esiste un elemento $a \in A \setminus \mathfrak{p}$ tale che ax è nilpotente. Poiché il nilradicale è l'intersezione di tutti gli ideali primi di A (stante (1.14)), segue che ax è un elemento di \mathfrak{q} , in particolare, e, poiché $x \notin \mathfrak{q}$, segue $a \in \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, una contraddizione.

(1) implica (2). Supponiamo, per assurdo, che la condizione (2) non valga, e fissiamo un elemento $x^* \in \mathfrak{p}$ tale che, per ogni $a \in A \setminus \mathfrak{p}$, l'elemento ax^* non sia nilpotente. Consideriamo adesso l'insieme

$$S = \{1, x^{*n}, a^n, x^{*n}a^m : a \in A \setminus \mathfrak{p}, n, m \geq 1\}.$$

Risulta semplice rendersi conto che S è una parte moltiplicativa di A . Inoltre, dal fatto che ax^* non è nilpotente, per ogni $a \notin \mathfrak{p}$, segue subito che $0 \notin S$. Dunque, l'anello delle frazioni $S^{-1}A$ è non nullo e ammette, quindi, un ideale massimale \mathfrak{m} . Detto $h : A \rightarrow S^{-1}A$

l'omomorfismo naturale, da (2.8) segue immediatamente che $\mathfrak{q} = h^{-1}(\mathfrak{m})$ è un ideale primo di A che non incontra S , ovvero \mathfrak{q} è contenuto in $A \setminus S$. Dalla costruzione di S , è facile dedurre che $A \setminus S$ è contenuto in \mathfrak{p} , e dal fatto che $x^* \in S \cap \mathfrak{p}$, segue che l'inclusione è stretta. Dunque $\mathfrak{q} \subseteq A \setminus S \subset \mathfrak{p}$, contro la minimalità di \mathfrak{p} . \square

2.26 Teorema. *Lo spettro primo X di un anello A è di Hausdorff se e soltanto se è T_1 .*

DIMOSTRAZIONE. Siccome ogni spazio di Hausdorff è T_1 , sarà sufficiente mostrare che, se $\text{Spec}(A)$ è T_1 , allora è di Hausdorff. Fissiamo due ideali primi $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ di A distinti, e scegliamo quindi un elemento $f \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}$. Per (2.22), ogni ideale primo di A è massimale, e quindi anche minimale. Dunque, alla luce di (2.25), esiste $a \in A \setminus \mathfrak{p}$ tale che af è nilpotente. Pertanto, posto $X = \text{Spec}(A)$, gli aperti principali X_a, X_f sono disgiunti, in virtù di (2.2), e inoltre contengono $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$, rispettivamente. Questo completa la dimostrazione. \square

2.3 Irriducibilità

2.27 Definizione. *Uno spazio topologico $X \neq \emptyset$ si dice irriducibile se, comunque si assegnino due aperti non vuoti A_1, A_2 , essi non sono disgiunti.*

Dalla definizione segue immediatamente che uno spazio topologico è irriducibile se e soltanto se esso non è unione di due suoi chiusi propri.

2.28 Proposizione. *Lo spettro primo X di un anello A è uno spazio topologico irriducibile se e soltanto se il nilradicale di A è un ideale primo.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo elementi $f, g \in A$ tali che $fg \in \text{Nilp}(A)$. In virtù di (2.2), risulta $X_f \cap X_g = X_{fg} = \emptyset$. Poiché X è irriducibile, almeno uno degli aperti X_f, X_g deve essere vuoto, e quindi $f \in \text{Nilp}(A)$ oppure $g \in \text{Nilp}(A)$. Viceversa, fissiamo due aperti non vuoti Ω, Σ di X i quali, per (1.5), si possono esprimere come unione di aperti principali, ovvero

$$\Omega = \bigcup_{r \in R} X_{a_r}, \quad \Sigma = \bigcup_{s \in S} X_{b_s}.$$

Essendo tali aperti non vuoti, esisteranno $r^* \in R, s^* \in S$ tali che $X_{a_{r^*}}, X_{b_{s^*}} \neq \emptyset$, cioè a_{r^*}, b_{s^*} non sono nilpotenti. Pertanto si ottiene

$$\Omega \cap \Sigma = \bigcup_{r \in R, s \in S} (X_{a_r} \cap X_{b_s}) = \bigcup_{r \in R, s \in S} X_{a_r b_s}.$$

Tra i termini di questa unione si trova ovviamente $X_{a_{r^*} b_{s^*}} \neq \emptyset$ perché, essendo $\text{Nilp}(A)$ primo, $a_{r^*}, b_{s^*} \notin \text{Nilp}(A) \Rightarrow a_{r^*} b_{s^*} \notin \text{Nilp}(A)$. Questo completa la dimostrazione. \square

2.29 Esempio. Se D è un dominio, allora $\text{Nilp}(A) = (0)$. Allora, alla luce di (2.28), $\text{Spec}(D)$ è irriducibile.

2.30 Corollario. *Sia A un anello. Allora un chiuso C di $\text{Spec}(A)$ è irriducibile se e soltanto se $C = V(\mathfrak{p})$, per qualche primo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che C sia irriducibile e sia \mathfrak{a} un ideale di A tale che $C = V(\mathfrak{a})$. Allora, in virtù di (1.12), $\text{Spec}(A/\mathfrak{a})$ è irriducibile e quindi $\text{Nilp}(A/\mathfrak{a})$ è un ideale primo di A/\mathfrak{a} , alla luce di (2.28). Dunque, detta $\pi : A \rightarrow A/\mathfrak{a}$ la proiezione canonica, $\pi^{-1}(\text{Nilp}(A/\mathfrak{a})) = \text{rad}(\mathfrak{a})$ è un ideale primo di A . A questo punto, basta osservare che $C = V(\text{rad}(\mathfrak{a}))$, per (1.2).

Viceversa, sia \mathfrak{p} un ideale primo di A tale che $C = V(\mathfrak{p})$. Allora C è irriducibile, essendo omeomorfo allo spettro primo del dominio di integrità A/\mathfrak{p} . \square

2.31 Definizione. *Sia X uno spazio topologico. Allora i sottoinsiemi irriducibili di X massimali rispetto all'inclusione si dicono componenti irriducibili di X .*

2.32 Proposizione. *Sia X uno spazio topologico. Allora X è unione delle sue componenti irriducibili.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un punto $x \in X$. Basterà mostrare che esiste una componente irriducibile di X contenente x . Sia Σ l'insieme dei sottospazi irriducibili di X contenenti x . Σ un insieme non vuoto, contenendo $\{x\}$, e viene parzialmente ordinato dall'inclusione. Sia \mathcal{F} una catena in Σ , e sia C l'unione degli elementi di \mathcal{F} . Se C fosse riducibile, esisterebbero due chiusi F, G di X tali che $C = (F \cap C) \cup (G \cap C)$, con $F \cap C, G \cap C \subsetneq C$. Fissiamo due punti $x_F, x_G \in C$ tali che $x_F \notin F, x_G \notin G$, e consideriamo insiemi $C_F, C_G \in \mathcal{F}$ tali che $x_F \in C_F, x_G \in C_G$. Poiché \mathcal{F} è una catena, possiamo supporre, senza perdita di generalità, $C_F \subseteq C_G$. Segue immediatamente che $C_G \cap F, C_G \cap G$ sono chiusi propri di C_G che ricoprono C_G , contro la sua irriducibilità. La contraddizione ottenuta mostra che $C \in \Sigma$ e quindi è un maggiorante per la catena \mathcal{F} . Pertanto, il Lemma di Zorn assicura che Σ ha elementi massimali, e ciascuno di essi è evidentemente una componente irriducibile di X contenente x . Questo completa la dimostrazione. \square

2.33 Proposizione. *Sia X uno spazio topologico. Allora valgono le seguenti asserzioni.*

- (i) *Se Y è un sottospazio irriducibile di X , allora la sua chiusura \overline{Y} in X è irriducibile.*
- (ii) *Le componenti irriducibili di X sono chiuse.*
- (iii) *Se Y è uno spazio topologico e $f : X \rightarrow Y$ è una funzione continua e surgettiva, allora Y è irriducibile.*

DIMOSTRAZIONE. (i). Per definizione, due chiusi di \overline{Y} sono della forma $F \cap \overline{Y}, G \cap \overline{Y}$, con F, G insiemi chiusi di X . Se $\overline{Y} = (F \cap \overline{Y}) \cup (G \cap \overline{Y})$, allora, in particolare $Y = (F \cap Y) \cup (G \cap Y)$. Poiché Y è irriducibile, allora uno dei chiusi $F \cap Y, G \cap Y$, diciamo $F \cap Y$, coincide con Y . Equivalentemente, $Y \subseteq F$, e quindi $\overline{Y} \subseteq F$, essendo F chiuso in X . Pertanto $\overline{Y} = F \cap \overline{Y}$. Questo prova che \overline{Y} è irriducibile.

(ii) è una conseguenza immediata di (i).

(iii). Siano F, G due chiusi di Y tali che $Y = F \cup G$. Poiché f è continua X è unione dei chiusi $f^{-1}(F), f^{-1}(G)$, e quindi si avrà, per esempio, $X = f^{-1}(F)$, essendo X irriducibile. Dalla surgettività di f segue $Y = F$. Questo conclude la dimostrazione. \square

2.34 Corollario. *Sia A un anello. Allora le componenti irriducibili di $\text{Spec}(A)$ sono tutti e soli gli insiemi della forma $V(\mathfrak{p})$, con \mathfrak{p} primo minimale di A .*

DIMOSTRAZIONE. L'asserzione segue immediatamente da (2.30), da (2.33,ii), tenendo presente che, se $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$, allora $V(\mathfrak{p}) \subsetneq V(\mathfrak{q})$ se e soltanto se $\mathfrak{p} \supsetneq \mathfrak{q}$. \square

2.35 Definizione. *Siano A un anello e \mathfrak{a} un ideale di A . Gli elementi minimali di $V(\mathfrak{a})$ si diranno primi minimali di \mathfrak{a} .*

2.36 Corollario. *Siano A un anello e \mathfrak{a} un ideale di A . Allora le componenti irriducibili di $V(\mathfrak{a})$ sono tutti e soli i chiusi $V(\mathfrak{p})$, con \mathfrak{p} primo minimale di \mathfrak{a} .*

DIMOSTRAZIONE. Basta usare (2.33,iii), (1.12) e (2.34). \square

2.4 Connessione

2.37 Definizione. *Uno spazio topologico X si dice connesso se non esistono due aperti non vuoti e disgiunti la cui unione coincida con X*

Si osserva subito che uno spazio topologico irriducibile è sempre connesso (perché per definizione due aperti non vuoti si incontrano). Inoltre è facile verificare che uno spazio topologico X è connesso se e soltanto se non esistono due aperti non vuoti e disgiunti la cui unione sia X . Il prossimo lemma sarà utile per caratterizzare quando lo spettro primo di un anello è connesso.

2.38 Lemma. *Se f è un elemento nilpotente per un anello A allora $1 + f$ è un invertibile.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $n \in \mathbb{N}$ un intero per il quale risulti $f^n = 0$. Allora

$$1 = 1 + f^n = (1 + f) \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h f^h,$$

e pertanto $f + 1$ è invertibile. \square

2.39 Proposizione. *Siano A un anello e X il suo spettro primo. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.*

- (1) X è sconnesso.
- (2) A possiede un idempotente non banale (ovvero distinto da 0 e 1).

DIMOSTRAZIONE. (2) implica (1). Supponiamo che esista in A un elemento f distinto da 0 e 1 tale che risulti $f^2 = f$. Allora tale elemento non è nilpotente. Infatti, se fosse $f \in \text{Nilp}(A)$, allora $f^n = 0$ per qualche intero n . Ma, da $f^2 = f$ segue subito $f^n = f \neq 0$, e ciò è assurdo. Pertanto deve risultare, per (2.2), $X_f \neq \emptyset$. Supponiamo, per assurdo, che risulti $X_{f-1} = \emptyset$: allora $f - 1$ è nilpotente e, stante (2.38), f è un invertibile, ovvero risulta $fg = 1$ per qualche $g \in A$. Segue subito

$$0 = f(f - 1)g = f - 1,$$

e pertanto $f = 1$, una contraddizione. Si ottiene subito, ancora per (2.2), $X_f \cap X_{f-1} = X_0 = \emptyset$. Inoltre si verifica facilmente che $X_f \cup X_{f-1} = X$, cioè X è unione di due aperti non vuoti e disgiunti. Così resta provato che la condizione (1) vale.

Viceversa, supponiamo che lo spazio topologico X sia sconnesso, e fissiamo due ideali $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ di A tali che i chiusi $V(\mathfrak{a}), V(\mathfrak{b})$ siano non vuoti e disgiunti, e ricoprono X . Allora $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \text{Nilp}(A)$, in virtù di (1.2), e inoltre $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$ (altrimenti esisterebbe un ideale massimale contenente sia \mathfrak{a} che \mathfrak{b} , contro il fatto che $V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b}) = \emptyset$). Fissati dunque $a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}$, tali che $a + b = 1$, l'elemento ab è nilpotente, essendo $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \text{Nilp}(A)$, e quindi $(ab)^n = 0$, per un opportuno $n > 0$. Si ha facilmente che $1 = (a + b)^{2n} = x_1 a^n + x_2 b^n$, per qualche $x_1, x_2 \in A$. Osserviamo che $x_1 a^n \neq 0$, in quanto altrimenti $1 = x_2 b^n \in \mathfrak{b}$, contro il fatto che $V(\mathfrak{b}) \neq \emptyset$. Analogamente $x_1 a^2 \neq 1$, essendo $V(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$. Dunque l'elemento $f = x_1 a^n$ è l'idempotente non banale cercato, poiché si ha $f(1 - f) = x_1 a^n x_2 b^n = 0$. Questo completa la dimostrazione. \square

2.5 Anelli booleani

2.40 Definizione. *Un anello si dice booleano se ogni suo elemento è idempotente.*

2.41 Proposizione. *In un anello booleano ogni ideale primo è massimale.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo, per assurdo, che esista un ideale primo \mathfrak{p} che non sia massimale. Quindi fissiamo un ideale proprio \mathfrak{a} tale che $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{a}$, e scegliamo un elemento $x \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$. Dal fatto che $0 = x(1 - x) \in \mathfrak{p}$ e che $x \notin \mathfrak{p}$, segue $1 - x \in \mathfrak{p} \subset \mathfrak{a}$, e pertanto $1 \in \mathfrak{a}$, una contraddizione. \square

Intendiamo adesso studiare la struttura topologica dello spettro primo di un anello booleano.

2.42 Corollario. *Se A è un anello booleano, allora $\text{Spec}(A)$ è uno spazio topologico di Hausdorff.*

Per semplicità, riportiamo la dimostrazione del seguente fatto di base di Topologia Generale, che ci sarà utile a breve.

2.43 Teorema. *Ogni sottoinsieme chiuso di uno spazio topologico compatto è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia X uno spazio compatto e sia K un suo sottoinsieme chiuso. Vogliamo provare che K è compatto. Sia $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ una famiglia di aperti di X tale che $\bigcup\{A_i : i \in I\} \supseteq K$. Poiché risulta $\bigcup_i A_i \cup (X \setminus K) = X$ e $X \setminus K$ è aperto, segue che $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X \setminus K\}$ è un ricoprimento aperto per X ; e quindi ammette un sottoricoprimento finito \mathcal{B}_1 , essendo X compatto. Detti A_j , dove J è un opportuno sottoinsieme finito di I , gli elementi di $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_1$, si ha immediatamente $\bigcup\{A_j : j \in J\} \supseteq K$, che è quanto era necessario provare, in virtù di (2.11). \square

2.44 Proposizione. *Se A è un anello booleano e X è il suo spettro primo, allora comunque si assegni $f \in A$ l'insieme X_f è contemporaneamente aperto e chiuso in X .*

DIMOSTRAZIONE. Fissato $f \in A$, l'insieme X_f è chiaramente aperto. Per far vedere che esso è chiuso proviamo che X_f è il complementare di un aperto. Essendo $a(a-1) = 0$ per ogni $a \in A$, alla luce di (2.2) deve ottenersi

$$X_f \cap X_{f-1} = X_{f(f-1)} = X_0 = \emptyset \quad (1).$$

Allora, se dimostriamo che $X_f \cup X_{f-1} = X$ dalla (1) seguirà subito $X_f = X \setminus X_{f-1}$ e quindi l'asserto. Supponiamo, per assurdo, che esista $\mathfrak{p} \in X$ tale che $\mathfrak{p} \notin X_f \cup X_{f-1}$. Equivalentemente $f, 1-f \in \mathfrak{p}$, e pertanto $\mathfrak{p} = A$, assurdo perché \mathfrak{p} è un ideale primo. \square

2.45 Corollario. *Se A è un anello booleano e X è il suo spettro primo allora $X_f = X \setminus X_{f-1}$ per ogni $f \in A$.*

2.46 Proposizione. *Siano A un anello booleano e $X = \text{Spec}(A)$. Allora comunque si assegnino $f_1, f_2, \dots, f_n \in A$ esiste $f \in A$ tale che*

$$\bigcup_{h=1}^n X_{f_h} = X_f$$

DIMOSTRAZIONE. Per (2.45), si ottiene $X_{f_r} = X \setminus X_{f_r-1}$ per $r = 1, 2, \dots, n$. Allora, tenendo conto dei teoremi di De Morgan, segue subito

$$\bigcup_{r=1}^n X_{f_r} = \bigcup_{r=1}^n (X \setminus X_{f_r-1}) = X \setminus \bigcap_{r=1}^n X_{f_r-1} = X \setminus X_{\prod_{r=1}^n (f_r-1)}.$$

Posto $f = 1 + \prod_{r=1}^n (f_r - 1)$, segue subito la tesi. \square

2.47 Proposizione. *Siano A un anello booleano e $X = \text{Spec}(A)$. Allora tutti e soli i sottoinsiemi simultaneamente aperti e chiusi in X sono gli insiemi X_f , con $f \in A$.*

DIMOSTRAZIONE. Da (2.44) segue che tutti gli insiemi del tipo X_f , con $f \in A$, sono aperti e chiusi in X . Si deve adesso mostrare che se T è un sottoinsieme di X aperto e chiuso allora esiste $a \in A$ tale che $T = X_a$. Essendo T un sottoinsieme chiuso di X , compatto per (2.4), T stesso è compatto, alla luce di (2.43), e aperto, e pertanto T è unione finita di aperti

principali. Dall'applicazione di (2.46) segue subito l'asserto.

Portiamo adesso una dimostrazione alternativa di (2.42):

Siano $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in X$ distinti (X è l'insieme degli ideali primi di A). Allora almeno uno degli insiemi $\mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}, \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{p}$, diciamo $\mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}$, deve risultare non vuoto, cioè esiste $f \in \mathfrak{p}$ tale che $f \notin \mathfrak{q}$. Essendo pertanto $(f) \not\subseteq \mathfrak{q}$ segue subito $\mathfrak{q} \in X \setminus V(f) = X_f$. Inoltre deve risultare $1 - f \notin \mathfrak{p}$ (altrimenti da $f \in \mathfrak{p}$ seguirebbe subito $\mathfrak{p} = A$, una contraddizione). Allora, in analogia a quanto precedentemente osservato, si ottiene $\mathfrak{p} \in X \setminus V(1 - f) = X_{1-f}$. Gli insiemi X_f, X_{1-f} costituiscono intorni rispettivamente di \mathfrak{q} e di \mathfrak{p} perché ciascuno di essi contiene un aperto, se stesso, contenente rispettivamente \mathfrak{q} e \mathfrak{p} . Risulta immediato osservare che

$$X_{1-f} \cap X_f = X_0 = \emptyset,$$

e quindi, in corrispondenza di due elementi distinti \mathfrak{p} e \mathfrak{q} di X , abbiamo determinato due intorni di \mathfrak{p} e \mathfrak{q} disgiunti; così resta provato che X è di Hausdorff. \square

Capitolo 3

Spazi Noetheriani

3.1 Proprietà topologiche generali

3.1 Proposizione. *Sia (M, \leq) un insieme parzialmente ordinato. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.*

- (1) *Ogni successione non decrescente (diremo anche catena ascendente) $x_1 \leq x_2 \leq \dots$ in M è stazionaria (ovvero esiste un numero naturale r tale che $x_n = x_r$, per ogni $n > r$).*
- (2) *Ogni sottoinsieme non vuoto di M ammette un elemento massimale.*

DIMOSTRAZIONE. (1) implica (2). Supponiamo per assurdo che esista un sottoinsieme non vuoto Σ di M che non ammetta elementi massimali: poiché Σ è non vuoto, esiste $x_1 \in \Sigma$. Poiché inoltre tale elemento non può essere massimale, allora esiste $x_2 \in \Sigma$ tale che $x_1 < x_2$. Procedendo per induzione si costruisce una successione crescente non stazionaria a elementi in M , e ciò è assurdo. Viceversa, si osserva subito che una successione non decrescente $\Sigma = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ a elementi in M costituisce un sottoinsieme non vuoto di M e pertanto dall'esistenza dell'elemento massimale in Σ segue subito che la catena considerata è stazionaria. \square

Quando in un insieme parzialmente ordinato M vale la condizione (1) di (3.1), diremo anche che M soddisfa la condizione della catena ascendente.

3.2 Definizione. *Uno spazio topologico X si dice Noetheriano se ogni catena numerabile ascendente di aperti è stazionaria, o, per (3.1), se, detto ϑ l'insieme degli aperti di X , parzialmente ordinato mediante la relazione di inclusione, ogni sottoinsieme non vuoto di ϑ ammette un elemento massimale.*

Si osserva immediatamente che uno spazio topologico è Noetheriano se e soltanto se ogni successione non crescente di chiusi è stabile o, equivalentemente, se ogni collezione non vuota di chiusi ha un elemento minimale (rispetto all'inclusione).

Faremo vedere come la struttura algebrica di un anello A sia legata alla Noetherianità di $\text{Spec}(A)$. Cominciamo con il provare il seguente

3.3 Lemma. *Se X è uno spazio topologico Noetheriano, allora ogni sottospazio di X è Noetheriano.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che esista un sottospazio Y di X che non sia Noetheriano. Allora esiste una catena ascendente di aperti di Y

$$A_1 \cap Y \subset A_2 \cap Y \subset \dots$$

che non è stazionaria (si osservi che A_n è aperto in X per ogni $n \in \mathbb{N}$ per definizione di topologia indotta). Consideriamo adesso l'insieme definito ponendo

$$\Sigma = \left\{ \bigcup_{h=1}^n A_h : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Σ è un insieme non vuoto di aperti di X e quindi ammette un elemento massimale $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, per ipotesi. Poiché si ha $A_n \cap Y \subset A_{n+1} \cap Y$, si ottiene, in particolare, che esiste $a \in A_{n+1} \cap Y$ tale che $a \notin A_n$. A fortiori si ha $a \notin A_r$, per ogni $r \leq n$. Allora

$$\bigcup_{r=1}^n A_r \subset \bigcup_{r=1}^{n+1} A_r,$$

contro la massimalità di $\bigcup_{r=1}^n A_r$ in Σ . □

3.4 Proposizione. *Se X è uno spazio topologico Noetheriano, allora X è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia X uno spazio topologico Noetheriano. Supponiamo per assurdo che X non sia compatto, cioè esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{F} = \{A_r : r \in R\}$, con R insieme arbitrario di indici, che non ammette alcun sottoricoprimento finito. Per ogni sottoinsieme finito T di R consideriamo l'aperto $A(T)$ definito ponendo

$$A(T) = \bigcup_{r \in T} A_r,$$

e denotiamo con Σ l'insieme

$$\Sigma = \{A(T) : T \text{ sottoinsieme finito di } R\}.$$

Si osserva subito che Σ è non vuoto e quindi ammette un elemento massimale $A(V)$ (V sottoinsieme finito di R). Poiché \mathcal{F} non ammette sottoricoprimenti finiti deve risultare

$$A(V) = \bigcup_{r \in V} A_r \subset X,$$

ovvero esiste $x \in X$ tale che $x \notin A_r$ per ogni $r \in V$. Ma, siccome gli aperti di \mathcal{F} ricoprono X , dovrà esistere $r^* \in R \setminus V$ tale che $x \in A_{r^*}$. Consideriamo adesso l'insieme $S = V \cup \{r^*\}$. Osservato che S è un sottoinsieme finito di R deve risultare

$$A(S) = \bigcup_{r \in S} A_r = \bigcup_{r \in V} A_r \cup A_{r^*} \in \Sigma.$$

Inoltre si ha $A(V) \subset A(S)$, contro la massimalità di $A(V)$ in Σ . □

3.5 Proposizione. *Sia X uno spazio topologico. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.*

- (α) X è Noetheriano.
- (β) Ogni aperto di X è compatto.
- (γ) Ogni sottospazio di X è compatto.

DIMOSTRAZIONE. (α) \Rightarrow (γ): detto Y un sottospazio di X , da (3.3) segue che Y è Noetheriano e, per (3.4), Y è compatto.

(γ) \Rightarrow (β): ovvia.

(β) \Rightarrow (α): sia $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ una catena ascendente numerabile di aperti di X . Se A è l'aperto di X definito ponendo

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

per ipotesi si ha la compattezza di A . Poiché è evidente che $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento aperto di A , da (2.11) segue l'esistenza di un sottoinsieme finito R di \mathbb{N} tale che

$$A = \bigcup_{r \in R} A_r.$$

Allora, detto $m = \max R$, poiché la catena assegnata è ascendente, deve ottenersi

$$A = A_m,$$

e quindi, per ogni $n > m$, si ha $A_m = A_n$. Questo completa la dimostrazione. \square

Vogliamo mostrare che l'insieme delle componenti irriducibili di uno spazio topologico Noetheriano è finito. Per il nostro fine, il seguente elementare lemma sarà cruciale.

3.6 Lemma. *Siano X uno spazio topologico e \mathcal{F} una collezione finita di sottospazi chiusi e irriducibili di X che ricopre X . Allora valgono le seguenti asserzioni.*

- (i) Se T è un sottospazio irriducibile di X , allora $T \subseteq Y$, per qualche $Y \in \mathcal{F}$.
- (ii) Se gli elementi di \mathcal{F} sono a due a due incomparabili, allora \mathcal{F} è la famiglia delle componenti irriducibili di X .

DIMOSTRAZIONE. (i). Sia T un sottospazio irriducibile di X . Allora $T = \bigcup \{T \cap Y : Y \in \mathcal{F}\}$. Poiché \mathcal{F} è finita si deve avere $T = T \cap Y$, per qualche $Y \in \mathcal{F}$. Questo prova (i).

(ii). Sia C una componente irriducibile di X . Allora, per (i), esiste un elemento $Y \in \mathcal{F}$ tale che $C \subseteq Y$. Quindi $C = Y$, per massimalità. Viceversa, sia $Y \in \mathcal{F}$. Se Y non fosse una componente irriducibile, esisterebbe un insieme irriducibile $T \subseteq X$ tale che $Y \subsetneq T$. Per (i), possiamo fissare un elemento $Z \in \mathcal{F}$ tale che $T \subseteq Z$, e quindi $Y \subseteq Z$, contro il fatto che gli elementi di \mathcal{F} sono a due a due incomparabili. \square

3.7 Teorema. *Sia X uno spazio topologico Noetheriano. Allora l'insieme delle componenti irriducibili di X è finito e ricopre X .*

DIMOSTRAZIONE. Siano \mathcal{C} la famiglia dei chiusi di X e \mathcal{G} la sottofamiglia di \mathcal{C} costituita dai chiusi di X che sono unione finita di chiusi irriducibili. Se $X \notin \mathcal{G}$, allora $\mathcal{C} \setminus \mathcal{G}$ è una collezione non vuota di chiusi di X , e ha un elemento minimale Z , essendo X uno spazio topologico Noetheriano. Essendo $Z \notin \mathcal{G}$, Z è riducibile, e quindi esistono chiusi $F, G \supsetneq Z$ tali che $F \cup G = Z$. Per la minimalità di Z in $\mathcal{C} \setminus \mathcal{G}$, si ha $F, G \in \mathcal{G}$. Equivalentemente, F, G sono unione finita di chiusi irriducibili, e pertanto tale risulta Z , una contraddizione. Questo mostra che $X \in \mathcal{G}$. Allora esiste una famiglia finita \mathcal{F}' di chiusi irriducibili di X che ricopre X . Detta \mathcal{F} la collezione degli elementi di \mathcal{F}' che non sono contenuti nell'unione dei rimanenti, si ha che \mathcal{F} ricopre X e i suoi elementi sono a due a due incomparabili, in particolare. Allora basta usare (3.6,ii) per concludere la dimostrazione. \square

3.2 Lo spettro primo di un anello Noetheriano

3.8 Definizione. *Diremo che un A -modulo M è Noetheriano se ogni catena ascendente numerabile di sottomoduli di M è stazionaria, ovvero, per (3.1), se, detto S l'insieme dei sottomoduli di M , parzialmente ordinato dalla relazione di inclusione, ogni sottoinsieme non vuoto di S ammette un elemento massimale.*

Non è difficile provare la seguente

3.9 Proposizione. *Un A -modulo è Noetheriano se e soltanto se ogni suo sottomodulo è finitamente generato.*

Un anello A è il più semplice esempio di A -modulo (il prodotto esterno è precisamente il prodotto).

Diremo che un anello A è Noetheriano se tale risulta come A -modulo.

Osservando che gli ideali di A sono tutti e soli i sottomoduli di A , si ha subito la seguente

3.10 Proposizione. *Un anello è Noetheriano se e soltanto se ogni suo ideale è finitamente generato.*

Come premesso, con il prossimo risultato stabiliamo una importante relazione fra la struttura algebrica di un anello A (in particolare dei suoi ideali) e la struttura topologica del suo spettro primo.

3.11 Teorema. *Se A è un anello Noetheriano allora $\text{Spec}(A)$ è uno spazio topologico Noetheriano.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $X = \text{Spec}(A)$. Alla luce di (3.5), sarà sufficiente far vedere che ogni aperto di X è compatto. Sia Ω un aperto di X , ovvero esiste un sottoinsieme E di A tale che $\Omega = X \setminus V(E)$. Se \mathfrak{J} è l'ideale generato da E , stante (1.2), deve aversi $\Omega = X \setminus V(\mathfrak{J})$. Siccome A è Noetheriano, allora \mathfrak{J} deve risultare finitamente generato, e

quindi sia $\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ un sistema di generatori di \mathfrak{J} . Se \mathfrak{p} è un ideale di A , allora \mathfrak{p} contiene \mathfrak{J} se e solo se \mathfrak{p} contiene tutti i generatori di \mathfrak{J} . Allora

$$V(\mathfrak{J}) = \bigcap_{h=1}^r V(f_h),$$

da cui si ha subito

$$\Omega = X \setminus V(\mathfrak{J}) = X \setminus \left[\bigcap_{h=1}^r V(f_h) \right] = \bigcup_{h=1}^r [X \setminus V(f_h)] = \bigcup_{h=1}^r X_{f_h}.$$

Si ha pertanto che Ω è unione finita di aperti principali e quindi, per (2.13), è compatto. Segue subito l'asserto. \square

Mostriamo adesso che il precedente risultato non può essere invertito, ovvero esistono anelli non Noetheriani il cui spettro primo è uno spazio topologico Noetheriano.

3.12 Esempio. Siano K un campo, $\mathbf{X} := \{X_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ una collezione infinita numerabile di indeterminate su K . Detto \mathfrak{a} l'ideale di $K[\mathbf{X}]$ generato dall'insieme $\{X_n^2 : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, allora è facile rendersi conto che l'anello $B := K[\mathbf{X}]/\mathfrak{a}$ non è Noetheriano. Infatti, se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, x_n è l'immagine canonica di X_n in B , allora

$$(x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \dots (x_1, \dots, x_n) \subset \dots$$

è una successione strettamente crescente di ideali di B . Sia adesso \mathfrak{b} l'ideale di B generato dall'insieme $\{x_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Per costruzione, risulta $x_n^2 = 0$, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, e quindi $\mathfrak{b} \subseteq \text{Nilp}(B)$. D'altra parte, si ha $(B/\mathfrak{b}) \cong K$, come si vede immediatamente, e quindi si ha $\mathfrak{b} = \text{Nilp}(B)$, essendo \mathfrak{b} un ideale massimale di B . Dunque $\text{Spec}(B) \cong \text{Spec}(B/\text{Nilp}(B)) \cong \text{Spec}(K)$, in virtù di (1.16). Questo prova che $\text{Spec}(B)$ è uno spazio topologico Noetheriano, essendo costituito da un punto.

3.3 Anelli con spettro Noetheriano: come si caratterizzano?

Come si è visto in (3.12), la Noetherianità di un anello è una condizione più forte della Noetherianità del suo spettro primo, che in questa sezione caratterizzeremo. Cominciamo mostrando la seguente condizione necessaria.

3.13 Proposizione. *Sia A un anello tale che $\text{Spec}(A)$ è uno spazio topologico Noetheriano. Allora A soddisfa la condizione della catena ascendente per gli ideali primi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{\mathfrak{p}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione non decrescente di ideali primi. Allora $\{V(\mathfrak{p}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ è una successione non crescente di chiusi in $\text{Spec}(A)$, e quindi è

stabile, per ipotesi. Dunque esiste un intero $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $V(\mathfrak{p}_n) = V(\mathfrak{p}_\nu)$, per ogni $n \geq \nu$. Segue immediatamente che $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}_\nu$, per ogni $n \geq \nu$. \square

La condizione della catena ascendente per gli ideali primi di un anello non è tuttavia sufficiente per la Noetherianità del suo spettro primo, come il seguente esempio mostrerà.

3.14 Esempio. Siano \mathbb{F}_2 il campo con due elementi e A l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{F}_2$, che è un anello con le operazioni indotte da quelle di \mathbb{F}_2 (ovvero $(f + g)(n) := f(n) + g(n)$ e $(fg)(n) := f(n)g(n)$, per ogni $f, g \in A, n \in \mathbb{N}$). Si vede subito che A è un anello booleano, e quindi ogni suo ideale primo è massimale, in virtù di (2.41). Dunque A soddisfa la condizione della catena ascendente per gli ideali primi. Vogliamo mostrare che $\text{Spec}(A)$ non è uno spazio topologico Noetheriano. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo l'ideale

$$\mathfrak{a}_n := \{f \in A : f(m) = 0 \text{ per ogni } m \geq n\}$$

di A . Allora $\{\mathfrak{a}_n : n \in \mathbb{N}\}$ è una successione crescente di ideali di A , e quindi risulta $V(\mathfrak{a}_n) \subseteq V(\mathfrak{a}_m)$, per ogni $m \leq n$. Basterà mostrare che la successione di chiusi $\{V(\mathfrak{a}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ è strettamente decrescente. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $\mathfrak{p}_n := \{f \in A : f(n) = 0\}$. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{p}_n è un ideale primo (e massimale) di A , in quanto è il nucleo dell'omomorfismo di anelli surgettivo $\phi_n : A \rightarrow \mathbb{F}_2$ definito ponendo $\phi_n(f) = f(n)$, per ogni $f \in A$. Per concludere, basta osservare che $\mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{p}_n$ ma $\mathfrak{a}_{n+1} \not\subseteq \mathfrak{p}_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ (infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione $f_n \in A$ definita ponendo $f_n(m) = 1$, se $m = n$, $f_n(m) = 0$ altrimenti, appartiene a $\mathfrak{a}_n \setminus \mathfrak{p}_n$). Si osservi che l'insieme $V(\mathfrak{a}_n)$ è infinito, per ogni $n \in \mathbb{N}$, contenendo l'insieme $\{\mathfrak{p}_m : m \geq n\}$. Inoltre tutti gli elementi di $V(\mathfrak{a}_n)$ sono minimali. Pertanto ciascuno dei chiusi $V(\mathfrak{a}_n)$ ha una collezione infinita di componenti irriducibili.

Vedremo fra poco che la mancata Noetherianità dello spettro primo dell'anello del precedente esempio è dovuta al fatto che ci sono chiusi con un numero infinito di componenti irriducibili. Cominciamo con una osservazione elementare, la cui verifica viene lasciata al lettore.

3.15 Osservazione. Siano X un insieme e $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione decrescente di sottoinsiemi di X non stabile. Se F_1 è unione degli insiemi Z_1, \dots, Z_r , allora almeno una delle successioni non crescenti $\mathcal{F}_i := \{Z_i \cap F_n : n \in \mathbb{N}\}$ non è stabile.

Il seguente risultato sarà cruciale ai nostri fini.

3.16 Teorema. *Sia X uno spazio topologico. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.*

- (i) X è Noetheriano.
- (ii) X soddisfa la condizione della catena discendente per i chiusi irriducibili e ogni chiuso di X ha un numero finito di componenti irriducibili.

DIMOSTRAZIONE. (i) \Rightarrow (ii). La prima parte dell'asserzione (ii) è ovvia. La seconda parte segue immediatamente da (3.3) e (3.7).

(ii) \Rightarrow (i). Supponiamo, per assurdo, che X non sia uno spazio topologico Noetheriano, e fissiamo una successione decrescente $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ di chiusi di X che non è stabile. Poiché le componenti irriducibili di F_1 sono in numero finito e ricoprono F_1 (per (2.32)), possiamo applicare (3.15), e quindi esiste una componente irriducibile Z_1 di F_1 tale che la successione $\mathcal{S}_1 := \{Z_1 \cap F_m : m \geq 1\}$ non è stabile. Per concludere la dimostrazione, basterà costruire una successione decrescente di chiusi irriducibili non stabile. Il primo termine sia Z_1 . Poiché la successione \mathcal{S}_1 non è stabile, esiste un n_1 tale che $Z_1 = Z_1 \cap F_1 \supsetneq Z_1 \cap F_{n_1}$, e inoltre la successione $\mathcal{S}'_1 := \{Z_1 \cap F_n : n \geq n_1\}$ non è stabile. Possiamo applicare (3.15) alla successione \mathcal{S}'_1 , e quindi esiste una componente irriducibile Z_2 del chiuso $Z_1 \cap F_{n_1}$ tale che la successione $\mathcal{S}_2 := \{Z_1 \cap Z_2 \cap F_n : n \geq n_1\}$ non è stabile. Si ha $Z_2 \subseteq Z_1 \cap F_{n_1} \subsetneq Z_1$. Procedendo per induzione, si costruisce una successione decrescente non stabile di chiusi irriducibili $Z_1 \supsetneq Z_2 \supsetneq \dots$ \square

Abbiamo adesso una prima caratterizzazione della Noetherianità dello spettro primo di un anello.

3.17 Corollario. *Sia A un anello. Allora $\text{Spec}(A)$ è Noetheriano se e soltanto se A soddisfa la condizione della catena ascendente per gli ideali primi e ogni ideale di A ha un numero finito di primi minimali.*

DIMOSTRAZIONE. Se A soddisfa la condizione della catena ascendente per gli ideali primi, allora $\text{Spec}(A)$ soddisfa la condizione della catena discendente per i chiusi irriducibili. A questo punto, l'asserzione è una conseguenza immediata di (2.36), (3.16) e (3.13). \square

3.18 Teorema. *Sia A un anello. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.*

- (i) $\text{Spec}(A)$ è uno spazio topologico Noetheriano.
- (ii) A soddisfa la condizione della catena ascendente per gli ideali radicali.
- (iii) A soddisfa la condizione della catena ascendente per gli ideali primi e ogni ideale di A ha un numero finito di primi minimali.
- (iv) Per ogni ideale \mathfrak{a} di A esiste un ideale finitamente generato $\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{a}$ tale che $\text{rad}(\mathfrak{a}) = \text{rad}(\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}})$.
- (v) Ogni ideale primo di A è il radicale di un ideale finitamente generato.

DIMOSTRAZIONE. (i) \Rightarrow (ii). Sia $\{\mathfrak{a}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione non decrescente di ideali radicali. Allora, per la Noetherianità di $X := \text{Spec}(A)$, esiste un intero $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $V(\mathfrak{a}_n) = V(\mathfrak{a}_{\nu})$, per ogni $n \geq \nu$. Si ha immediatamente, $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{\nu}$, per ogni $n \geq \nu$, in virtù di (1.15).

(ii) \Rightarrow (i). Segue immediatamente tenendo presente che $V(\mathfrak{a}) = V(\text{rad}(\mathfrak{a}))$, per ogni ideale \mathfrak{a}

di A .

(i) \Rightarrow (ii). Sia \mathfrak{a} un ideale di A . In virtù di (3.5), l'aperto $X \setminus V(\mathfrak{a})$ è compatto, e quindi esso è unione finita di aperti principali, stante (2.13). Equivalentemente, esistono $f_1, \dots, f_n \in A$ tali che $V(\mathfrak{a}) = \bigcap \{V(f_i) : i = 1, \dots, n\} = V(f_1, \dots, f_n)$, e tali elementi f_1, \dots, f_n si possono scegliere in \mathfrak{a} , per (1.5). Segue immediatamente $\text{rad}(\mathfrak{a}) = \text{rad}((f_1, \dots, f_n))$, per (1.15).

(ii) \Rightarrow (i). Sia U un aperto di X . Per (3.5), sarà sufficiente dimostrare che U è compatto. Detto \mathfrak{a} un ideale di A tale che $U = \text{Spec}(A) \setminus V(\mathfrak{a})$, fissiamo elementi $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{a}$ tali che $\text{rad}(\mathfrak{a}) = \text{rad}((f_1, \dots, f_n))$. Segue immediatamente che U è unione finita degli aperti principali X_{f_i} ($i = 1, \dots, n$), e quindi è compatto, per (2.13).

L'equivalenza di (i) e (iii) è stata mostrata in (3.17), e (iv) \Rightarrow (v) è banale. Dunque, basta mostrare che (v) \Rightarrow (iv). Sia Σ l'insieme degli ideali \mathfrak{a} di A tali che $\text{rad}(\mathfrak{b}) \subsetneq \text{rad}(\mathfrak{a})$, per ogni ideale finitamente generato $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$, e assumiamo, per assurdo, che Σ sia non vuoto. Muniamo Σ dell'ordine dell'inclusione, fissiamo una catena $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$, e sia \mathfrak{c} l'unione dei membri di \mathcal{F} (\mathfrak{c} è un ideale!). Fissato ad arbitrio un ideale finitamente generato \mathfrak{b} contenuto in \mathfrak{c} , esiste un ideale $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}$ tale che $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{f}$, essendo \mathcal{F} una catena. Dunque $\text{rad}(\mathfrak{b}) \subsetneq \text{rad}(\mathfrak{f}) \subseteq \mathfrak{c}$. Questo mostra che $\mathfrak{c} \in \Sigma$, e quindi è un maggiorante per \mathcal{F} . Per il Lemma di Zorn, Σ ha almeno un elemento massimale \mathfrak{q} , che non può essere primo, per ipotesi, e deve inoltre essere distinto da A . Dunque, esistono $x, y \in A \setminus \mathfrak{q}$ tali che $xy \in \mathfrak{q}$. Per la massimalità di \mathfrak{q} in Σ , gli ideali $\mathfrak{i}_x := \mathfrak{q} + (x)$, $\mathfrak{i}_y := \mathfrak{q} + (y)$ non appartengono a Σ , e quindi esistono ideali finitamente generati $\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y$ contenuti in $\mathfrak{i}_x, \mathfrak{i}_y$, rispettivamente, tali che $\text{rad}(\mathfrak{i}_x) = \text{rad}(\mathfrak{a}_x)$ e $\text{rad}(\mathfrak{i}_y) = \text{rad}(\mathfrak{a}_y)$. Si ha, ovviamente, $\mathfrak{i}_x \mathfrak{i}_y \subseteq \mathfrak{q}$ e, in particolare, $\mathfrak{a}_x \mathfrak{a}_y \subseteq \mathfrak{q}$. Dunque, $\text{rad}(\mathfrak{a}_x \mathfrak{a}_y) \subseteq \text{rad}(\mathfrak{q})$. Dal fatto che $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{i}_x \cap \mathfrak{i}_y \subseteq \text{rad}(\mathfrak{a}_x) \cap \text{rad}(\mathfrak{a}_y) = \text{rad}(\mathfrak{a}_x \mathfrak{a}_y)$, segue $\text{rad}(\mathfrak{q}) = \text{rad}(\mathfrak{a}_x \mathfrak{a}_y)$. L'ideale $\mathfrak{a}_x \mathfrak{a}_y$ è ovviamente finitamente generato, tali essendo $\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y$, e questa è una contraddizione, poiché $\mathfrak{q} \in \Sigma$. Il teorema è completamente provato. \square