

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2015/2016
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 1 - Moduli e sottomoduli

Nel seguito A è un anello commutativo unitario non nullo; M è un A -modulo; $\{N_\alpha\}$ è una famiglia di sottomoduli di M ; $\{I_\alpha\}$ è una famiglia di ideali di A ; $N, L, H \in \{N_\alpha\}$ e $I, J \in \{I_\alpha\}$.

1. Sia G un gruppo abeliano additivo. Verificare che l'insieme $End(G)$ degli endomorfismi di G è un anello (generalmente non commutativo) con le operazioni

$$\begin{aligned}(\varphi + \psi)(x) &= \varphi(x) + \psi(x) && \text{(addizione puntuale)} \\ (\varphi\psi)(x) &= \varphi(\psi(x)) && \text{(composizione di funzioni)}.\end{aligned}$$

Mostrare inoltre che l'applicazione

$$End(G) \times G \longrightarrow G, \quad (\varphi, x) \rightarrow \varphi(x)$$

definisce su G una struttura di $End(G)$ -modulo sinistro.

2. Per ogni $a \in A$, definiamo l'applicazione

$$\mu_a : M \longrightarrow M; \quad m \rightarrow am.$$

Verificare che μ_a è un endomorfismo (A -lineare) di M e che l'applicazione

$$A \longrightarrow End(M); \quad a \rightarrow \mu_a$$

è un omomorfismo iniettivo di anelli.

3. Sia V uno spazio vettoriale sul campo K . Mostrare che, se φ è un fissato K -endomorfismo di V , allora V assume una struttura di $K[X]$ -modulo con la moltiplicazione scalare definita da:

$$K[X] \times V \longrightarrow V; \quad \left(\sum a_i X^i, v\right) \rightarrow \sum a_i \varphi^i(v).$$

Viceversa, ogni modulo V su $K[X]$ è in particolare uno spazio vettoriale su K , inoltre la moltiplicazione per X ,

$$\mu_X : V \longrightarrow V; \quad v \rightarrow Xv$$

è un K -endomorfismo di V .

In questo modo, si ha una biiezione tra l'insieme delle coppie (V, φ) , dove V è un K -spazio vettoriale e φ è un K -endomorfismo di V , e l'insieme dei $K[X]$ -moduli.

4. Verificare che $I \subseteq \text{Ann}(\frac{M}{IM})$ e quindi $\frac{M}{IM}$ ha una struttura di $\frac{A}{I}$ modulo, con la moltiplicazione scalare definita da

$$(a + I)(m + IM) = (am + IM).$$

In particolare, se I è un ideale massimale di A , allora $\frac{M}{IM}$ è uno spazio vettoriale su $\frac{A}{I}$.

5. Sia G un gruppo abeliano additivo e $n \geq 2$. Mostrare che se $ng = 0$ per ogni $g \in G$, allora G è un modulo su $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.
6. Sia A un dominio integro. Un elemento $m \in M$ si dice di *torsione* se esiste $a \in A, a \neq 0$ tale che $am = 0$. Mostrare che l'insieme T degli elementi di torsione di M è un sottomodulo di M .

M si dice un *modulo di torsione* se $M = T$, si dice *privo di torsione* se $T = 0$. Mostrare che $\frac{M}{T}$ è privo di torsione.

7. Mostrare che ogni gruppo abeliano finito è uno \mathbb{Z} -modulo di torsione.
8. Un A -modulo M si dice *fedele* se $\text{Ann}_A(M) = 0$.
Verificare che se $I = \text{Ann}_A(M)$ allora M è un $\frac{A}{I}$ -modulo fedele.
9. Verificare che $I = \text{Ann}_A(\frac{A}{I}) = (0 :_A A + I)$.
10. Verificare che $(N :_A L) = \text{Ann}(\frac{(N+L)}{N})$.
11. Mostrare che valgono le seguenti proprietà:

(a) *Proprietà Distributiva*: $I(N + L) = IN + IL$;

(b) *Legge Modulare*: Se $L \subseteq N$, allora $N \cap (L + H) = L + (N \cap H)$.

Mostrare poi con un esempio che in generale, anche per gli ideali di A , risulta $N \cap (L + H) \neq (N \cap L) + (N \cap H)$.

12. Verificare che $\cap_{\alpha} N_{\alpha}$ e $\sum_{\alpha} N_{\alpha} = \{n_{\alpha_1} + \cdots + n_{\alpha_s}; n_{\alpha_i} \in N_{\alpha_i}\}$ sono sottomoduli di M .

Verificare inoltre che:

(a) $(\cap_{\alpha} N_{\alpha} : L) = \cap_{\alpha} (N_{\alpha} : L)$;

(b) $(L : \sum_{\alpha} N_{\alpha}) = \cap_{\alpha} (L : N_{\alpha})$.

13. Verificare che $(N :_M I) := \{x \in M; xI \subseteq N\}$ è un sottomodulo di M contenente N . Inoltre valgono le seguenti proprietà:

(a) $((N :_M I) :_M J) = (N :_M IJ) = ((N :_M J) :_M I)$;

(b) $(\cap_{\alpha} N_{\alpha} :_M I) = \cap_{\alpha} (N_{\alpha} :_M I)$;

(c) $(N :_M \sum_{\alpha} I_{\alpha}) = \cap_{\alpha} (N :_M I_{\alpha})$.