Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2015/2016
AL410 - Fondamenti di Algebra Commutativa - Prof. S. Gabelli
Esercizi 10 - Anelli Noetheriani

Nel seguito A è un anello commutativo unitario non nullo e I è un ideale di A.

1. Mostrare che se A è un dominio Noetheriano, allora ogni elemento di A è prodotto di un un numero finito di elementi irriducibili.

2. Mostrare che l'anello quoziente A/I è un A-modulo noetheriano se e soltanto se è un anello noetheriano.

3. Mostrare che se A/I è noetheriano, per ogni ideale non nullo I di A, allora A è noetheriano.

4. *Teorema Cinese dei Resti.* Siano $I_1, \dots, I_n$ ideali di A e considerare l'applicazione
$$\varphi : A \longrightarrow \frac{A}{I_1} \times \cdots \times \frac{A}{I_n} \quad a \to (a + I_1, \dots, a + I_n).$$
Mostrare che:
(a) φ è un omomorfismo di anelli.
(b) φ è suriettivo se e soltanto se se gli ideali $I_1, \dots, I_n$ sono a coppie coprimi.
(c) $Ker(\varphi) = I_1 \cap \cdots \cap I_n$.
Quindi, se $I_1, \dots, I_n$ sono a coppie coprimi, si ha un isomorfismo
$$\frac{A}{I_1 \dots I_n} \longrightarrow \frac{A}{I_1} \times \cdots \times \frac{A}{I_n} \quad a + I \to (a + I_1, \dots, a + I_n).$$

5. Siano K un campo, $A = K[X, Y]$ e $I = (XY)$. Verificare che $I = (X) \cap (Y)$ e l'omomorfismo
$$\varphi : \frac{A}{I} \longrightarrow \frac{A}{(X)} \times \frac{A}{(Y)} \quad a + I \to (a + (X), a + (Y)).$$
è ben posto e non suriettivo.

6. Siano $I_1, \dots, I_n$ ideali di A tali che $I_1 \cap \cdots \cap I_n = (0)$. Mostrare che, se A/I_i è noetheriano per ogni i, allora A è noetheriano.

   Suggerimento: Usare l'Esercizio 4.

7. Sia $M = x_1A + \cdots + x_nA$ un A-modulo finitamente generato. Mostrare che:

   (a) $Ann_A M$ è isomorfo a $(0 :_A x_1A) \cap \cdots \cap (0 :_A x_nA)$.

   (b) L'applicazione

   $$\frac{A}{Ann_a M} \longrightarrow x_1A \oplus \cdots \oplus x_nA\,; \quad a + Ann_A M \mapsto (x_1a, \dots, x_na)$$

   è ben posta ed è un omomorfismo iniettivo di moduli.

   Dedurne che:

   (a) Se M è un A-modulo noetheriano, allora $\dfrac{A}{Ann_a M}$ è un anello noetheriano.

   (b) Se esiste un A-modulo noetheriano fedele, allora A è un anello noetheriano.

8. Mostrare che, se A è uno spazio vettoriale di dimensione finita su un suo sottocampo k, allora A è un anello noetheriano.

9. Dimostrare che, se A è noetheriano, anche l'anello delle serie formali $A[[X]]$ è noetheriano.

   Suggerimento Adattare la dimostrazione del Teorema della Base, sostituendo il grado di un polinomio con l'ordine di una serie.

10. Siano K un campo e $K[\mathbf{X}]$ l'anello dei polinomi in un insieme qualsiasi $\mathbf{X}$ di indeterminate indipendenti su K.

    Mostrare che l'insieme M dei polinomi che si annullano in $\mathbf{0}$ è un ideale massimale di $K[\mathbf{X}]$.

    Mostrare inoltre che, se $\mathbf{X}$ è infinito, M non è finitamente generato.