

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2015/2016
AL410 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 12 - Ideali Frazionari

1. Siano A un anello commutativo unitario non nullo e M un A -modulo. Siano poi $\{N_\alpha\}$ una famiglia di sottomoduli di M ; $\{I_\alpha\}$ una famiglia di ideali di A ; $N, L, H \in \{N_\alpha\}$ e $I, J \in \{I_\alpha\}$.

Verificare che $(N :_M I) := \{x \in M; xI \subseteq N\}$ è un sottomodulo di M contenente N . Inoltre valgono le seguenti proprietà:

- (a) $(N :_M I) :_M J = (N :_M IJ) = (N :_M J) :_M I$;
- (b) $(\cap_\alpha N_\alpha :_M I) = \cap_\alpha (N_\alpha :_M I)$;
- (c) $(N :_M \sum_\alpha I_\alpha) = \cap_\alpha (N :_M I_\alpha)$.

Nel seguito A indica un dominio con campo dei quozienti K . Un *ideale frazionario* di A è un sotto A -modulo I di K tale che $(A :_A I) \neq (0)$.

2. Mostrare che:

- (a) I è un ideale frazionario se e soltanto se $I = \frac{1}{d}J$, dove $J \subseteq A$ è un ideale e $d \in A \setminus \{0\}$;
- (b) Se I è un sotto A -modulo di K finitamente generato, allora I è un ideale frazionario;
- (c) Ogni sotto A -modulo di un ideale frazionario è un ideale frazionario.

3. Siano I, J ideali frazionari di A . Mostrare che: $IJ, I \cap J, I + J$ e $(I :_K J) = \{x \in K; xJ \subseteq I\}$ sono ideali frazionari.

4. Mostrare che, se I è un ideale frazionario di A , allora $(I :_K I)$ è un sottoanello di K contenente A .

Mostrare inoltre con un esempio che $(A :_K I)$ non è necessariamente un anello.

5. Mostrare che l'insieme $\mathcal{F}(A)$ degli ideali frazionari di A è un semigruppato rispetto alla moltiplicazione, con unità uguale ad A .
6. Un ideale frazionario I di A si dice *invertibile* se è invertibile nel semigruppato $\mathcal{F}(A)$, cioè se esiste un (unico) ideale frazionario J tale che $IJ = A$.
Mostrare che se I è invertibile, allora il suo inverso è $(A :_K I)$.
7. Mostrare che un ideale frazionario invertibile è finitamente generato.
8. Sia I un ideale frazionario di A . Mostrare che l'applicazione

$$\varphi : (A :_K I) \longrightarrow \text{Hom}_A(I, A); (\varphi(x))(y) = xy$$

è un isomorfismo di A -moduli.

Per questo motivo l'ideale frazionario $(A :_K I)$ si dice anche il *duale* di I .