

Università degli Studi Roma Tre  
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2015/2016  
AL410 - Fondamenti di Algebra Commutativa  
Prof. S. Gabelli  
Esercizi 13 - Dipendenza integrale

Nel seguito  $A$  è un anello commutativo unitario non nullo.

1. Sia  $A \subseteq B$  un'estensione di anelli. Mostrare che  $B$  è un  $A$ -modulo finitamente generato se e soltanto se  $A$  è una  $A$ -algebra finitamente generata intera su  $A$ .
2. Sia  $d$  un intero privo di fattori quadratici. Se  $a := x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ , poniamo  $\bar{a} = x - y\sqrt{d}$ .  
Mostrare che  $a$  è intero su  $\mathbb{Z}$  se e soltanto se  $a + \bar{a}, a\bar{a} \in \mathbb{Z}$ .
3. Sia  $d$  un intero privo di fattori quadratici e sia  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ . Mostrare che la chiusura integrale di  $\mathbb{Z}$  in  $K$  è  $\mathbb{Z}[\omega_d]$ , dove  $\omega_d = \sqrt{d}$  se  $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$  e  $\omega_d = (1 + \sqrt{d})/2$  se  $d \equiv 1 \pmod{4}$ .

*Suggerimento.* Usare l'esercizio 2.

4. Sia  $A$  un dominio con campo dei quozienti  $K$ . Mostrare che per ogni  $x \in K$  algebrico su  $A$  esiste  $a \in A$  tale che  $ax$  sia intero su  $A$ .
5. Mostrare che un dominio con il massimo comune divisore è integralmente chiuso.

*Suggerimento.* Notare che ogni elemento del campo dei quozienti si può scrivere come  $a/b$  con  $MCD(a, b) = 1$ .

6. Sia  $A \subseteq B$  un'estensione di anelli e sia  $S \subseteq A$  una parte moltiplicativa. Mostrare che, se  $C$  è la chiusura intera di  $A$  in  $B$ , allora la chiusura intera di  $A_S$  in  $B_S$  è  $C_S$ .

Dedurre che se  $A$  è integralmente chiuso in  $B$ , allora  $A_S$  è integralmente chiuso in  $B_S$ .

7. Siano  $A := \mathbb{R}[X^2 + 1]$ ,  $B := \mathbb{R}[X]$ ,  $Q := (X^2 + 1)B$  e  $P = Q \cap A$ .  
Mostrare che:

- (a)  $\bar{A} = B$ ;  
 (b)  $\frac{1}{X+1} \in B_Q \setminus \bar{A}_P$ .

(Confrontare con l'Esercizio 3)

8. Sia  $A := \frac{\mathbb{Z}[X]}{(X^2 + 4)} = \mathbb{Z}[x]$ , dove  $x$  denota la classe di  $X$  in  $A$ .

Mostrare che  $A$  è un dominio integro, con campo dei quozienti  $\mathbb{Q}[x]$ . Inoltre  $t = 4/x$  è intero su  $A$ , ma  $t \notin A$ .

Dedurre che un anello quoziente di un dominio integralmente chiuso non è necessariamente integralmente chiuso.

9. Sia  $A = \frac{k[X, Y]}{(Y^2 - X^3)} = k[x, y]$ , dove  $x$  e  $y$  denotano rispettivamente la classe di  $X$  e  $Y$  in  $A$ .

Mostrare che  $A$  è un dominio integro con campo dei quozienti  $k(x, y)$ . Inoltre  $t := y/x$  è intero su  $A$ , ma  $t \notin A$ . Mostrare infine che  $\bar{A} = k[t]$ .

10. Sia  $B$  un anello tale che  $A \subseteq B$  e sia  $f(X) \in B[X]$ . Mostrare che, se tutti i coefficienti di  $f(X)$  sono interi su  $A$ , allora  $f(X)$  è intero su  $A[X]$ .
11. Sia  $A$  un dominio di integrità. Mostrare che  $A[X]$  è integralmente chiuso se e soltanto se  $A$  è integralmente chiuso.
12. Mostrare che  $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$  e  $F[X_1, \dots, X_n]$ , dove  $F$  è un campo, sono integralmente chiusi.