

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2015/2016
AL410 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 14 - Valutazioni

Un gruppo abeliano $(G, *)$ è un *gruppo ordinato* se in esso è definita una relazione \leq di ordine compatibile con l'operazione, cioè tale che:

$$x \leq x', y \leq y' \Rightarrow x * y \leq x' * y'.$$

Se G è un gruppo additivo ordinato e α è un simbolo, possiamo estendere l'operazione di G e la sua relazione di ordine all'insieme $G \cup \{\alpha\}$ ponendo, per ogni $x \in G$:

$$x < \alpha; x * \alpha = \alpha * x = \alpha.$$

In notazione additiva, si usa porre $\alpha = \infty$, mentre in notazione moltiplicativa si usa $\alpha = 0$.

1. Mostrare che $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è un gruppo totalmente ordinato rispetto all'ordine lessicografico.

Se A è un dominio con campo dei quozienti K , il gruppo moltiplicativo quoziente $\Delta = \frac{K^*}{U(A)}$ si dice il *gruppo di divisibilità* di A .

2. Mostrare che il gruppo di divisibilità di un dominio A è un gruppo ordinato rispetto alla relazione

$$xU(A) \leq yU(A) \iff xy^{-1} \in A.$$

3. Mostrare che V è un dominio di valutazione se e soltanto se il suo gruppo di divisibilità è un gruppo totalmente ordinato.

Se K è un campo e G è un gruppo additivo totalmente ordinato, una applicazione suriettiva $v : K \rightarrow G \cup \{\infty\}$ si dice una *valutazione su K* se

$$\begin{aligned} v(x) &= \infty \text{ se e soltanto se } x = 0; \\ v(xy) &= v(x) + v(y), \text{ per ogni } x, y \in K; \\ v(x + y) &\geq \min\{v(x), v(y)\}. \end{aligned}$$

In notazione moltiplicativa, $v : K \longrightarrow G \cup \{0\}$ è una valutazione se:

$$\begin{aligned} v(x) &= 0 \text{ se e soltanto se } x = 0; \\ v(xy) &= v(x)v(y), \text{ per ogni } x, y \in K; \\ v(x + y) &\leq \max\{v(x), v(y)\}. \end{aligned}$$

Se G è la somma diretta di n copie di \mathbb{Z} , ordinato lessicograficamente, l'applicazione v si dice una *valutazione discreta di rango n* .

4. Sia A un dominio con campo dei quozienti K . Verificare che un'applicazione $u : A \longrightarrow G \cup \{\infty\}$ che verifica le proprietà precedenti si può estendere a una valutazione su K ponendo $v(\frac{a}{b}) = u(a) - u(b)$.

5. Sia v una valutazione su un campo K , in notazione additiva. Mostrare che l'insieme $A_v := \{x \in K ; v(x) \geq 0\}$ è un anello di valutazione con ideale massimale $M_v := \{x \in K ; v(x) > 0\}$.

(In notazione moltiplicativa, $A_v := \{x \in K ; v(x) \leq 1\}$ e $M_v := \{x \in K ; v(x) < 1\}$.)

6. Sia (V, M) un anello di valutazione con campo dei quozienti K e gruppo di divisibilità Δ .

Mostrare che l'applicazione $v : V \longrightarrow \Delta \cup \{0\}$ definita da

$$v(0) = 0 \text{ e } v(x) = xU(V) \text{ per } x \in K^*$$

è una valutazione su K , in notazione moltiplicativa, il cui anello di valutazione A_v coincide con V .

7. Sia A un dominio a fattorizzazione unica con campo dei quozienti K e sia $p \in A$ un elemento primo. Per ogni $x \in K \setminus \{0\}$, possiamo scrivere $x = \frac{a}{b}p^z$ dove $z \in \mathbb{Z}$ e p non divide né a né b .

Mostrare che l'applicazione

$$v_p : K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}; \quad 0 \mapsto \infty; \quad x = \frac{a}{b}p^z \mapsto z$$

è una valutazione discreta (di rango uno), il cui anello associato è $A_{\langle p \rangle}$.

v_p si chiama la *valutazione p -adica* associata a p .

8. Sia K un campo. Se $f(X)$ è un polinomio a coefficiente in K , indichiamo con $ord(f)$ l'ordine di $f(X)$ come serie formale.

Verificare che l'applicazione $v : K(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ definita da

$$v(0) = \infty \text{ e } v(f/g) = ord(f) - ord(g) \text{ per } g \neq 0.$$

è una valutazione discreta (di rango uno), il cui anello associato è $K[X]_{(X)}$.
 Verificare inoltre che il grado non definisce una valutazione su $K(X)$.

9. Sia K un campo e $v : K(X) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ l'applicazione definita da

$$v(0) = \infty \text{ e } v(f/g) = \deg(g) - \deg(f) \text{ per } f \neq 0.$$

Mostrare che v è una valutazione discreta (di rango uno), il cui anello associato è $K[X^{-1}]_{(X^{-1})}$.

10. Sia K un campo e $a \in K$. Per ogni $f(X) \in K[X] \setminus \{0\}$, indichiamo con $\mu_a(f)$ la molteplicità di a come radice di $f(X)$, $\mu_a(f) = 0$ se e soltanto se $f(a) \neq 0$.

Sia $v_a : K(X) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ l'applicazione definita da

$$v_a(0) = \infty, v_a(f/g) = \mu_a(f) - \mu_a(g) \text{ se } f \neq 0.$$

Mostrare che v_a è una valutazione discreta, il cui anello di valutazione V_a è l'anello delle funzioni razionali *definite in a* , ovvero

$$V_a = \{f/g \in K(X) ; g(a) \neq 0\} = K[X]_{(X-a)}.$$

11. Sia K un campo e siano v_X, v_Y rispettivamente le valutazioni X -adica e Y -adica su $K(X, Y)$ (ricordare che $K[X, Y]$ è un UFD).

Mostrare che l'applicazione

$$v : K(X, Y) \rightarrow (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \cup \{\infty\}; \quad v(f/g) = (v_X(f/g), v_Y(f/g))$$

è una valutazione su $K(X, Y)$.