Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2015/2016
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 2 - Omomorfismi di moduli

Nel seguito A è un anello commutativo unitario non nullo.

1. Siano M, M' A-moduli e sia N un sottomodulo di M. Mostrare che:

   (a) L'applicazione
   $$\pi : M \longrightarrow \frac{M}{N}\,; \quad x \to x + N$$
   è un omomorfismo di A-moduli e il suo nucleo è N.

   (b) Se $\varphi : M \longrightarrow M'$ è un omomorfismo di A-moduli e $N \subseteq Ker(\varphi)$, allora l'applicazione
   $$\overline{\varphi} : \frac{M}{N} \longrightarrow M'\,; \quad x + N \to \varphi(x)$$
   è ben definita ed è un omomorfismo di A-moduli.
   Inoltre $\varphi = \overline{\varphi}\pi$ e se $\psi : \dfrac{M}{N} \longrightarrow M'$ è un omomorfismo di A-moduli tale che $\varphi = \psi\pi$, allora $\psi = \overline{\varphi}$.

2. Siano H, M, N A-moduli. Dimostrare i seguenti *Teoremi di Isomorfismo*:

   (a) *Primo Teorema di Omomorfismo*: Se $\varphi : M \longrightarrow N$ è un omomorfismo di A-moduli, allora l'applicazione
   $$\overline{\varphi} : \frac{M}{Ker(\varphi)} \longrightarrow Im(\varphi)\,; \quad x + Ker(\varphi) \to \varphi(x)$$
   è ben definita ed è un isomorfismo di A-moduli.

   (b) *Secondo Teorema di Omomorfismo*: Se $H, N \subseteq M$, l'applicazione
   $$\frac{N}{N \cap H} \longrightarrow \frac{N + H}{H}\,; \quad x + (N \cap H) \to x + H$$
   è un isomorfismo di A-moduli.

(c) *Terzo Teorema di Omomorfismo o Teorema del Doppio Quoziente*: Se $H \subseteq N \subseteq M$, allora l'applicazione

$$\frac{M/H}{N/H} \longrightarrow \frac{M}{N}\,; \quad (x+H)+N/H \to x+N$$

è un isomorfismo di A-moduli.

3. Verificare che l'applicazione $Hom_A(A, M) \longrightarrow M$ definita da $\alpha \to \alpha(1)$ è un isomorfismo di A-moduli.

4. Sia $\varphi : N \longrightarrow N'$ un omomorfismo di A-moduli. Mostrare che le applicazioni

$$Hom_A(M, N) \longrightarrow Hom_A(M, N')\,; \quad \alpha \to \varphi\alpha$$

$$Hom_A(N', M) \longrightarrow Hom_A(N, M)\,; \quad \alpha \to \alpha\varphi$$

sono omomorfismi di A-moduli.

5. Per ogni A-modulo H, indichiamo con $H^* := Hom_A(H, A)$ il *modulo duale* di H. Mostrare con un esempio che H^* può essere il modulo nullo anche se H non lo è.

6. Mostrare che l'applicazione

$$Hom_A(M, N) \longrightarrow Hom_A(N^*, M^*)\,; \quad \varphi \to \varphi^*,$$

dove

$$\varphi^* : N^* \longrightarrow M^*\,; \quad \alpha \to \alpha\varphi,$$

è un omomorfismo di A-moduli.