Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2015/2016
AL410 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 3 – Successioni esatte

1. Siano M_1, M_2 sottomoduli di M. Mostrare che $M = M_1 \oplus M_2$ se e soltanto se esistono morfismi $\pi_i : M \longrightarrow M_i$ e $\epsilon_i : M_i \longrightarrow M$, $i = 1, 2$, tali che
$$\pi_i\epsilon_i = id_{M_i}; \quad \pi_i\epsilon_j = 0, i \neq j; \quad \epsilon_1\pi_1 + \epsilon_2\pi_2 = id_M.$$

2. Siano M un A-modulo ed $f \in Hom_A(M, M)$ un endomorfismo di M tale che $f \circ f = f$. Provare che M è isomorfo a $Ker(f) \oplus Im(f)$.

3. Siano N_1 ed N_2 sottomoduli di un A-modulo M. Verificare che la seguente successione di A-moduli è esatta:
$$0 \longrightarrow N_1 \cap N_2 \xrightarrow{\varphi} N_1 \oplus N_2 \xrightarrow{\psi} N_1 + N_2 \longrightarrow 0,$$
dove $\varphi(x) = (x, x)$ e $\psi((x, y)) = (x - y)$.

4. Determinare una risoluzione libera dell'ideale $M = (X, Y, Z) \subseteq k[X, Y, Z]$.

5. Mostrare che una somma diretta di moduli liberi è un modulo libero.

6. Sia $A = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$ con p, q due numeri primi distinti. Mostrare che $\mathbb{Z}_p$ e $\mathbb{Z}_q$ non sono liberi su A, mentre ovviamente A lo è. Quindi $\mathbb{Z}_p$ e $\mathbb{Z}_q$ sono A-moduli proiettivi che non sono liberi.

7. Verificare che il funtore controvariante $Hom_A(-, M)$ è esatto a sinistra. Cioè, data una successione esatta di A-moduli,
$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3 \longrightarrow 0,$$
la successione
$$0 \longrightarrow Hom_A(N_3, M) \longrightarrow Hom_A(N_2, M) \longrightarrow Hom_A(N_1, M)$$
è esatta.

8. Mostrare che il funtore covariante $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, -)$ non è esatto a destra.

9. Mostrare che il funtore controvariante $Hom_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z})$ non è esatto a destra.

10. Mostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti per un A-modulo E. Un modulo che soddisfa queste condizioni si chiama *iniettivo*:

    (a) Il funtore $Hom_A(-, E)$ è esatto (a destra);

    (b) Ogni successione esatta

    $$0 \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

    si spezza;

    (c) Dato un morfismo $g : N \longrightarrow E$ ed un morfismo iniettivo $f : N \longrightarrow M$, esiste un morfismo $h : M \longrightarrow E$ tale che $g = hf$.