Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2015/2016

AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli

Esercizi 4 - Prodotto tensoriale

Nel seguito, se non specificato altrimenti, consideriamo moduli su un fissato anello commutativo unitario A.

1. Verificare che le seguenti applicazioni sono isomorfismi di moduli:

   (a) $A \otimes M \longrightarrow M\,; \quad a \otimes m \mapsto am$;

   (b) $M \otimes N \longrightarrow N \otimes M\,; \quad m \otimes n \mapsto n \otimes m$;

   (c) $(M \otimes N) \otimes L \longrightarrow N \otimes (M \otimes L)\,; \quad (m \otimes n) \otimes l \mapsto n \otimes (m \otimes l)$;

   (d) $(M \oplus N) \otimes L \longrightarrow (M \otimes L) \oplus (N \otimes L)\,; \quad (m \oplus n) \otimes l \mapsto (m \otimes l) \oplus (n \otimes l)$.

   Suggerimento: Usare la proprietà universale del prodotto tensoriale per verificare che le applicazioni sono ben definite.

2. Siano $M' \subseteq M$, $N' \subseteq N$ sottomoduli e sia $\Gamma \subseteq M \otimes N$ il sottomodulo generato dagli elementi $x \otimes y$ con $x \in M'$ oppure $y \in N'$. Mostrare che l'applicazione

   $$\frac{M}{M'} \otimes \frac{N}{N'} \longrightarrow \frac{(M \otimes N)}{\Gamma}\,; \quad (m + M') \otimes (n + N') \mapsto (m \otimes n) + \Gamma,$$

   è un isomorfismo di moduli.

   Suggerimento: Verificare che l'applicazione:

   $$\frac{M}{M'} \times \frac{N}{N'} \longrightarrow \frac{(M \otimes N)}{\Gamma}\,; \quad (m + M', n + N') \mapsto (m \otimes n) + \Gamma$$

   è ben definita e lineare.

3. Usando l'esercizio precedente, mostrare che:

   $$\frac{A}{I} \otimes_A \frac{A}{J} \cong \frac{A}{I + J}; \quad M \otimes_A \frac{A}{J} \cong \frac{M}{JM}.$$

4. Siano B una A-algebra e M un B-modulo. Verificare che se M è finito su B (generato da $m_1, \dots, m_r$) e B è finito su A (come A-modulo, generato da $b_1, \dots, b_s$), allora M è finito su A (generato da $\{b_i m_j\}$).

5. Siano L_1, L_2 moduli liberi di rango finito rispettivamente uguale a r_1, r_2. Mostrare che $L_1 \otimes L_2$ è libero di rango $r_1 r_2$.

6. Siano B una A-algebra, M un A-modulo ed
$$\epsilon : M \longrightarrow B \otimes_A M\,; \quad m \mapsto 1 \otimes m$$
l'applicazione canonica. Mostrare che
   (a) Se M è generato da $\{m_\lambda\}$ su A, $B \otimes_A M$ è generato da $\{1 \otimes m_\lambda\}$ su B.
   (b) Se N è un B-modulo, per ogni applicazione A-lineare $f : M \longrightarrow N$ esiste una unica applicazione B-lineare $g : M \otimes_A B \longrightarrow N$ tale che $f = g\epsilon$ (ovvero $f(m) = g(1 \otimes m)$).

   Suggerimento: Considerare l'applicazione A-bilineare
$$B \times M \longrightarrow N\,; \quad (b, m) \mapsto bf(m).$$

7. Siano B una A-algebra e M un A-modulo libero, con base $\{m_\lambda\}$. Dimostrare che:
   (a) L'applicazione canonica $\epsilon : M \longrightarrow B \otimes_A M$ è iniettiva.
   (b) $B \otimes_A M$ è un B-modulo libero, con base $\{1 \otimes m_\lambda\}$.

8. Sia B una A-algebra. Mostrare che
$$A[X] \otimes_A B \cong B[X]\,; \quad A[X] \otimes_A A[Y] \cong A[X, Y].$$

9. Siano A e B due anelli. N si chiama un (A, B)-*modulo* se è contemporaneamente un A-modulo ed un B-modulo e le due strutture sono compatibili, cioè $(am)b = a(mb)$, per ogni $a \in A$, $b \in B$, $m \in M$. Ad esempio se N è un B-modulo e B è una A-algebra, allora N è un (A, B)-modulo.

   Mostrare che, se M è un A-modulo e L è un B-modulo, allora $M \otimes_A N$ è un B-modulo, $N \otimes_B L$ è un A-modulo e
$$(M \otimes_A N) \otimes_B L \cong M \otimes_A (N \otimes_B L).$$