Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2015/2016
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 6 - Anelli di frazioni

Nel seguito A denota un anello commutativo unitario e S una sua parte moltiplicativa.

Se $s \in A$ è un elemento non nilpotente e $S = \{s^n, n \geq 0\}$, si scrive $A_S = A_s$.

1. Sia X un sottoinsieme di A tale che $1 \in X$ e sia
$$S := S(X) := \{s_1 \dots s_k\,; s_i \in X\,, k \geq 1\}.$$
Mostrare che S è una parte moltiplicativa di A (che si dice la parte moltiplicativa *generata* da X).
Mostrare inoltre che se X è finito e non contiene zerodivisori, allora $A_S = A_s$ per un opportuno $s \in S$.

2. Mostrare che l'omomorfismo naturale
$$A \longrightarrow A_S\,; \quad a \mapsto \frac{a}{1}$$
è un isomorfismo se e soltanto se $S \subseteq \mathcal{U}(A)$.

3. Sia A un dominio e sia $S = A \setminus \{0\}$. Mostrare che $(A[X])_S = K[X]\,$, dove K è il campo dei quozienti di A.

4. Sia K un campo. Mostrare che il campo dei quozienti dell'anello delle serie formali $K[[X]]$ è l'anello delle *serie di Laurent*
$$K((X)) := \{\sum_{i \geq s} a_i X^i; a_i \in K, s \in \mathbb{Z}\}.$$

5. Mostrare che $A_s = A[\frac{1}{s}]$ e che A_s è isomorfo a $\frac{A[X]}{(sX-1)}$.
Suggerimento: Considerare l'applicazione
$$A[X] \longrightarrow A_s\,; \quad f(X) \mapsto f(\frac{1}{s}).$$

6. Sia $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Determinare la saturazione $\overline{S}$ della parte moltiplicativa $S = \{s^n\}_{n \geq 0}$ e verificare che $\mathbb{Z}_s = \mathbb{Z}_{\overline{S}}$.

7. Sia I un ideale di A. Mostrare che $S = 1 + I = \{1 + a\,;\, a \in I\}$ è una parte moltiplicativa di A e determinare la saturazione di S.

8. Sia $S = 1 + (X) \subseteq A[X]$. Mostrare che l'applicazione
$$A[X]_S \longrightarrow A[[X]]\,; \quad \frac{f(X)}{g(X)} \to f(X)g(X)^{-1}$$
è un (ben definito) omomorfismo iniettivo di anelli.

9. Sia K un campo e sia $S = \{X^n\}_{n \geq 1}$ la parte moltiplicativa di $K[X]$ generata da X. Verificare che gli anelli $K[X]_S$ e $K[X, X^{-1}]$ sono isomorfi.

10. Sia $\phi : A \longrightarrow A_S$, $a \to \dfrac{a}{1}$ l'omomorfismo naturale e sia T una parte moltiplicativa di A. Mostrare che $ST = \{st, s \in S, t \in T\}$ è una parte moltiplicativa di A e che
$$A_{ST} \simeq (A_S)_{\phi(T)}.$$
Dedurne che, se $P \subseteq Q$ sono due ideali primi di A, allora $A_P = (A_Q)_{PA_Q}$.

11. Sia I un ideale di A e sia $T = \{s + I\,;\, s \in S\} \subseteq \dfrac{A}{I}$. Mostrare che T è una parte moltiplicativa di $\dfrac{A}{I}$ e che
$$(\frac{A}{I})_T \simeq \frac{A_S}{I_S}.$$
Dedurne che, se P è un ideale primo, il campo residuo dell'anello locale A_P è isomorfo al campo dei quozienti del dominio $\dfrac{A}{P}$.

12. Siano M, N moduli su A. Mostrare che l'applicazione
$$M_S \otimes_{A_S} N_S \longrightarrow (M \otimes N)_S\,; \quad \frac{m}{s} \otimes \frac{n}{t} \mapsto \frac{m \otimes n}{st}$$
è un isomorfismo A_S-lineare.

Suggerimento: Notare che A_S è un (A, A_S)-modulo ed usare l'Esercizio 4-9.