**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2015/2016**
**AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa**
**Prof. S. Gabelli**
**Esercizi 7 - Estensione e contrazione di ideali**

Nel seguito $A$ e $B$ sono anelli commutativi unitari non nulli e $f : A \longrightarrow B$ è un omomorfismo unitario. Se $I$ è un ideale di $A$, indichiamo con $I^e$ l'*estensione* di $I$ in $B$, ovvero l'ideale di $B$ generato da $f(I)$:

$$I^e = f(I)B = \{\sum_{i=1}^{n} f(a_i)b_i; a_i \in I, b_i \in B, n \geq 1\}.$$

Se $J$ è un ideale di $B$, indichiamo poi con $I^c$ l'ideale *contrazione* di $J$ su $A$, ovvero la controimmagine di $J$:

$$I^c = f^{-1}(J).$$

Se $B = A_S$ e $f : A \longrightarrow A_S$ , $a \to \frac{a}{1}$ è l'omomorfismo canonico, allora $I^e = I_S$. Se poi $f$ è iniettivo, allora $I^e = IA_S$ è l'ideale di $A_S$ generato da $I$.

1. Siano $I_1$, $I_2$ ideali di $A$ e $J_1$, $J_2$ ideali di $B$. Verificare che:
   (a) $(I_1 + I_2)^e = I_1^e + I_2^e$;  $(J_1 + J_2)^c \supseteq J_1^c + J_2^c$;
   (b) $(I_1 \cap I_2)^e \subseteq I_1^e \cap I_2^e$;  $(J_1 \cap J_2)^c = J_1^c \cap J_2^c$;
   (c) $(I_1 I_2)^e = I_1^e {I_2}^e$;  $(J_1 J_2)^c \supseteq J_1^c J_2^c$;
   (d) $(I_1 :_A I_2)^e \subseteq (I_1^e :_B I_2^e)$;  $(J_1 :_B J_2)^c \subseteq (J_1^c :_A J_2^c)$;
2. Sia $A$ un dominio integro con campo dei quozienti $K$. Mostrare che $I_S = \{x \in K\,;\, xs \in I \text{ per qualche } s \in S\} := \bigcup_{s \in S} (I :_K sA)$.
3. Siano $I, H$ ideali di $A$. Mostrare che se $H$ è finitamente generato, allora
   $$(I :_A H)_S = (I_S :_{A_S} H_S).$$
4. Supponiamo che $f$ sia suriettivo. Mostrare che:
   (a) $I^e = f(I)$; dunque $f(I)$ è un ideale di $B$.

(b) Se $I \supseteq Ker(f)$, allora l'applicazione:

$$\frac{A}{I} \longrightarrow \frac{B}{f(I)} \quad \text{definita da} \quad a + I \to f(a) + f(I)$$

è ben posta ed è un isomorfismo.

(c) Se $J$ è un ideale di $B$, allora l'applicazione:

$$\frac{A}{J^c} \longrightarrow \frac{B}{J} \quad \text{definita da} \quad a + J^c \to f(a) + J$$

è ben posta ed è un isomorfismo.

5. Sia $A$ un dominio di integrità con campo dei quozienti $K$ e sia $B$ un sopra anello di $A$ (cioè $A \subseteq B \subseteq K$). Mostrare che se $P \in \mathrm{Spec}(B)$ allora $A_{P \cap A} \subseteq B_P$.